A nem-euklidesi újabb háromszögtan főbb képletei.

Irta: *dr. Sárközy Pál.*

Ismeretes, hogy az újabb háromszögtan milyen változatos összefüggéseket kutatott ki a háromszöggel kapcsolatos fontosabb pontok, egyenesek és bizonyos görbék között.

Ha a nem-euklidesi geometriában vizsgáljuk a háromszöget, akkor sokkal változatosabb és egyúttal harmonikusabb összefüggéseket kapunk.

A következőkben a nem-euklidesi geometria újabb háromszögtanának fontosabb képleteit foglaljuk össze. A képletek megalkotásánál alkalmaztuk a nem-euklidesi síknak az euklidesi síkra való geodetikus leképzését. Ez a leképzés az egyeneseket egyenesekbe viszi át, de a szögek nem mutatkoznak természetes nagyságukban.

A képletek összeállításánál az elliptikus esetet vesszük alapul, melynél az egész sík érvényesül, vagyis ebben nincsenek nem-tulajdonképpeni pontok és egyenesek. Az abszolutum egyenlete az elliptikus esetben derékszögű Descartes-féle koordinátákat véve:

$$x^2 + y^2 + R^2 = 0.$$

A hiperbolikus esetre jutunk ebből, ha R helyébe iR-t teszünk. Az euklidesi geometria képleteit pedig $R \to 0$ határátmenettel kapjuk.

1. Alapformulák.

A fontosabb alapformulák

$$f_{ii} = x_i^2 + y_i^2 + R^2,$$
$$f_{ik} = x_i x_k + y_i y_k + R^2.$$

A

$$T = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}$$

determináns aldeterminánsai

$$F_{11} = f_{22} f_{33} - f_{23}^2 = R^2 (x_2 - x_3)^2 + R^2 (y_2 - y_3)^2 + \\ + (x_2 y_3 - x_3 y_2)^2$$

$$F_{12} = f_{23} f_{31} - f_{21} f_{33} = R^2 (x_2 - x_3)(x_3 - x_1) + R^2 (y_2 - y_3) \cdot$$
$$\cdot (y_3 - y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2)(x_3 y_1 - x_1 y_3).$$

— — — — — — — — — — — — — — —

Megjegyezzük, hogy az $R \to 0$ határátmenetnél, vagyis az Euklides-féle geometriára térve át, kapjuk

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Továbbá

$$\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} a^2 & -ab \cos C & -ac \cos B \\ -ab \cos C & b^2 & -bc \cos A \\ -ac \cos B & -bc \cos A & c^2 \end{vmatrix}$$

Az itt szereplő a, b és c az alapháromszög oldalainak hosszúsága, a szemközti szögek pedig A, B és C.

2. Baricentrikus koordináták.

Az újab bháromszögtan alapképleteit baricentrikus koordinátákban adjuk meg. Legyenek a $P_1 P_2 P_3$ alapháromszög P_i csúcsának Descartes-féle koordinátái (x_i, y_i). A P (x, y) pontnak erre a háromszögre vonatkoztatott baricentrikus koordinátáit jelöljük ξ, η, ζ-val. A Descartes-féle koordináták kifejezhetők a baricentrikusokkal

$$x = \frac{x_1 \xi + x_2 \eta + x_3 \zeta}{\xi + \eta + \zeta}, \quad y = \frac{y_1 \xi + y_2 \eta + y_3 \zeta}{\xi + \eta + \zeta}. \quad (1)$$

Viszont innen

$$\begin{aligned} \xi : \eta : \zeta = {} & (y_2 - y_3) x - (x_2 - x_3) y + x_2 y_3 - x_3 y_2 : \\ & : (y_3 - y_1) x - (x_3 - x_1) y + x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ & : (y_1 - y_2) x - (x_1 - x_2) y + x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{aligned}$$

Az $x^2 + y^2 + R^2 = 0$ abszolutum egyenlete az (1) alapján

$$f_{11} \xi^2 + 2 f_{12} \xi\eta + f_{22} \eta^2 + 2 f_{13} \xi\zeta + 2 f_{23} \eta\zeta + f_{33} \zeta^2 = 0.$$

Ugyanennek egyenlete vonalkoordinátákban

$$F_{11}u^2 + 2\,F_{12}uv + F_{22}v^2 + F_{13}uw + 2\,F_{23}vw + F_{33}w^2 = 0.$$

A $P_0\,(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ pont abszolút polárisa

$$(f_{11}\,\xi_0 + f_{12}\,\eta_0 + f_{13}\,\zeta_0)\,\xi + (f_{21}\,\xi_0 + f_{22}\,\eta_0 + f_{23}\,\zeta_0)\,\eta + \\ + (f_{31}\,\xi_0 + f_{32}\,\eta_0 + f_{33}\,\zeta_0)\,\zeta = 0.$$

Az
$$u_0\xi + v_0\eta + w_0\zeta = 0$$
vagy $e_0\,[u_0, v_0, w_0]$ egyenes abszolút pólusa

$$(F_{11}u_0 + F_{12}v_0 + F_{13}w_0,\ F_{21}u_0 + F_{22}v_0 + F_{23}w_0, \\ F_{31}u_0 + F_{32}v_0 + F_{33}w_0).$$

Rövidség kedvéért bevezetjük még a következő jelöléseket

$$\varphi_{ik} = f_{11}\,\xi_i\xi_k + f_{12}\,(\xi_i\eta_k + \xi_k\eta_i) + f_{22}\,\eta_i\eta_k + f_{13}\,(\xi_i\zeta_k + \xi_k\zeta_i) + \\ + f_{23}\,(\eta_i\zeta_k + \eta_k\zeta_i) + f_{33}\,\zeta_i\zeta_k.$$

$$\Phi_{ik} = F_{11}\,u_iu_k + F_{12}\,(u_iv_k + u_kv_i) + F_{22}\,v_iv_k + \\ + F_{13}\,(u_iw_k + u_kw_i) + F_{23}\,(v_iw_k + v_kw_i) + F_{33}\,w_iw_k.$$

Ha a P_1 és P_2 pontok közötti távolságot d-vel jelöljük, akkor áll

$$\cos\frac{d}{R} = \frac{\varphi_{12}}{\sqrt{\varphi_{11}\,\varphi_{22}}}$$

és

$$\sin^2\frac{d}{R} = \frac{1}{\varphi_{11}\,\varphi_{22}}\begin{vmatrix}\varphi_{11} & \varphi_{12}\\ \varphi_{12} & \varphi_{22}\end{vmatrix}$$

Az e_1 és e_2 egyenesek bezárta ω szögre pedig kapjuk

$$\cos\omega = \frac{\Phi_{12}}{\sqrt{\Phi_{11}\,\Phi_{22}}}$$

A két egyenes merőlegességének feltétele eszerint

$$\Phi_{12} = 0.$$

Adott P_0 ponton át az e_0 egyenesre bocsátott merőleges egyenlete

$$\begin{vmatrix}\xi & \eta & \zeta\\ \xi_0 & \eta_0 & \zeta_0\\ F_{11}u_0 + F_{13}v_0 + F_{12}w_0 & F_{21}u_0 + F_{22}v_0 + F_{23}w_0 & F_{31}u_0 + E_{32}v_0 + F_{33}w_0\end{vmatrix} = 0.$$

Két pontot is egymásra merőlegesnek mondunk, ha az abszolút kúpszeletre vonatkozólag konjugáltak. A P_1 és P_2 pontok merőlegességének feltétele

$$\varphi_{12} = 0.$$

Adott P_0 pontnak az e_0 egyenesen merőleges társa

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ u_0 & v_0 & w_0 \\ f_{11}\xi_0+f_{12}\eta_0+f_{13}\zeta_0 & f_{21}\xi_0+f_{22}\eta_0+f_{23}\zeta_0 & f_{31}\xi_0+f_{32}\eta_0+f_{33}\zeta_0 \end{vmatrix} = 0.$$

A P_1 és P_2 pontokkal megadott P_1P_2 távolság felezési pontjának koordinátái

$$\left(\frac{\xi_1}{\sqrt{\varphi_{11}}}+\frac{\xi_2}{\sqrt{\varphi_{22}}},\ \frac{\eta_1}{\sqrt{\varphi_{11}}}+\frac{\eta_2}{\sqrt{\varphi_{22}}},\ \frac{\zeta_1}{\sqrt{\varphi_{11}}}+\frac{\zeta_2}{\sqrt{\varphi_{22}}}\right)$$

Ha az egyik négyzetgyök előjelét, pl. $\sqrt{\varphi_{22}}$-t negatívvá tesszük, kapjuk a másik felező pont koordinátáit.

Viszont a P_1P_2 távolság kétszerezésével kapott Q pont koordinátái, ha a P_1Q távolság felező pontja P_2,

$$\left(\frac{\varphi_{22}\,\xi_1-2\,\varphi_{12}\,\xi_2}{\varphi_{22}\,(\xi_1+\eta_1+\zeta_1)-2\,\varphi_{12}\,(\xi_2+\eta_2+\zeta_2)},\right.$$

$$\frac{\varphi_{22}\,\eta_1-\varphi_{12}\,\eta_2}{\varphi_{22}\,(\xi_1+\eta_1+\zeta_1)-2\,\varphi_{12}\,(\xi_2+\eta_2+\zeta_2)},$$

$$\left.\frac{\varphi_{22}\,\zeta_1-\varphi_{12}\,\zeta_2}{\varphi_{22}\,(\xi_1+\eta_1+\zeta_1)-2\,\varphi_{12}\,(\xi_2+\eta_2+\zeta_2)}\right)$$

3. A pontkör és vonalkör.

1. A távolság képlete alapján felírhatjuk a pontkör egyenletét baricentrikus koordinátákban. Ha a kör középpontja $P_0\,(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$, sugara δ, akkor a kör egyenlete

$$\cos^2\frac{\delta}{R}\,\varphi_{00}(f_{11}\xi^2+f_{22}\eta^2+f_{33}\zeta^2+2f_{12}\xi\eta+2f_{23}\eta\zeta+2f_{31}\zeta\xi)=$$
$$=[f_{11}\xi_0\xi+f_{22}\eta_0\eta+f_{33}\zeta_0\zeta+f_{12}(\xi_0\eta+\eta_0\xi)+$$
$$+f_{23}(\eta_0\zeta+\zeta_0\eta)+f_{31}(\zeta_0\xi+\xi_0\zeta)]^2.$$

Általános alakban

$$f_{11}\xi^2+f_{22}\eta^2+f_{33}\zeta^2+2f_{12}\xi\eta+2f_{23}\eta\zeta+2f_{31}\zeta\xi=$$
$$=(a\xi+b\eta+c\zeta)^2.$$

Képletünk mutatja, hogy a pontkört három pontja határozza meg.

2. Mindazok az egyenesek, melyek állandó ω szöget zárnak be a fix $e_0\,[u_0, v_0, w_0]$ egyenessel, *vonalkört* határoznak meg. Egyenlete

$$\cos^2\omega\,\Phi_{00}(F_{11}u^2+F_{22}v^2+F_{33}w^2+2\,F_{12}uv+2\,F_{23}vw+2\,F_{31}wu)=$$
$$=[F_{11}u_0u+F_{22}v_0v+F_{33}w_0w+F_{12}\,(u_0v+v_0u)+$$
$$+F_{23}\,(v_0w+w_0v)+F_{31}\,(w_0u+u_0w)]^2.$$

Általános alakban

$$F_{11}u^2+F_{22}v^2+F_{33}w^2+2\,F_{12}uv+2\,F_{23}vw+2\,F_{31}wu=$$
$$=(Au+Bv+Cw)^2.$$

A fix e_0 egyenest a kör *tengelyének* mondjuk.

Mivel az A, B és C meghatározásához három adat szükséges, azért a vonalkört három érintője határozza meg.

3. Ha ugyanazt a kört egyszer mint pontkört, másszor mint vonalkört írjuk fel, akkor a P_0 centrum és az e_0 tengely között az összefüggés

$$u_0=f_{11}\,\xi_0+f_{12}\,\eta_0+f_{13}\,\zeta_0,$$
$$v_0=f_{21}\,\xi_0+f_{22}\,\eta_0+f_{23}\,\zeta_0,$$
$$w_0=f_{31}\,\xi_0+f_{32}\,\eta_0+f_{33}\,\zeta_0.$$

és

$$\xi_0=F_{11}\,u_0+F_{12}\,v_0+F_{13}\,w_0,$$
$$\eta_0=F_{21}\,u_0+F_{22}\,v_0+F_{23}\,w_0,$$
$$\zeta_0=F_{31}\,u_0+F_{32}\,v_0+F_{33}\,w_0.$$

A kör tengelye tehát a centrumnak abszolút polárisa, a centrum pedig a tengely abszolút pólusa.

4. A két alapháromszög.

Az alapul választott $P_1\,P_2\,P_3$ háromszög csúcsai baricentrikus koordinátákban $P_1(1, 0, 0)$, $P_2\,(0, 1, 0)$, $P_3\,(0, 0, 1)$. A háromszög oldalainak egyenletei :

$$P_2\,P_3\equiv\xi\qquad\qquad=0$$
$$P_3\,P_1\equiv\qquad\eta\qquad=0$$
$$P_1\,P_2\equiv\qquad\qquad\zeta=0.$$

A $P_1\,P_2\,P_3$ oldalainak abszolút pólusai adják a $\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_2\,\mathfrak{P}_3$ *poláris háromszöget*. Ennek csúcsai és oldalai

$$\mathfrak{P}_1\,(F_{11}, F_{12}, F_{13}),\ \mathfrak{P}_2\,(F_{21}, F_{22}, F_{23}),\ \mathfrak{P}_3\,(F_{31}, F_{32}, F_{33})$$
$$\mathfrak{P}_2\,\mathfrak{P}_3\equiv f_{11}\,\xi+f_{12}\,\eta+f_{13}\,\zeta=0$$
$$\mathfrak{P}_3\,\mathfrak{P}_1\equiv f_{21}\,\xi+f_{22}\,\eta+f_{23}\,\zeta=0$$
$$\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_2\equiv f_{31}\,\xi+f_{32}\,\eta+f_{33}\,\zeta=0.$$

Asszociált pontoknak mondjuk a következő négy pontot

$$(\xi, \eta, \zeta), \quad (-\xi, \eta, \zeta), \quad (\xi, -\eta, \zeta), \quad (\xi, \eta, -\zeta).$$

Ha a P_0 pontot a $P_1 P_2 P_3$ alapháromszög csúcsaiból vetítjük a szemközti oldalakra, kapjuk a Q_1, Q_2, Q_3 pontokat. A Q_1-nek a $P_2 P_3$-ra vonatkozó harmonikus társa Q_1'. Hasonlóan kapjuk a Q_2' és Q_3' pontokat. A $Q_1' Q_2' Q_3'$ egy egyenesbe esik s ezt a P_0 *harmonikálé*jának nevezzük. Egyenlete

$$\frac{\xi}{\xi_0} + \frac{\eta}{\eta_0} + \frac{\zeta}{\zeta_0} = 0.$$

Viszont az

$$u_0 \xi + v_0 \eta + w_0 \zeta = 0$$

egyenes harmonikáléja lesz az $\left(\frac{1}{u_0}, \frac{1}{v_0}, \frac{1}{w_0}\right)$ pontnak.

5. Pontpárok és egyenespárok.

1. A háromszög síkjában adva a $P(\xi, \eta, \zeta)$ pont. A $P_1 P$ egyenes Q_1 pontban metszi a $P_2 P_3$ oldalt. A Q_1-nek tükörképe a $P_2 P_3$ középpontjára vonatkozólag Q_1'. Hasonlókép kapjuk a másik két oldalon a Q_2' és Q_3' pontokat. A $P_1 Q_1'$, $P_2 Q_2'$ és $P_3 Q_3'$ egyenesek a P_r ponton metszik egymást. Ezt a P pont *recikprokjának* nevezzük és koordinátái

$$\left(\frac{1}{f_{11}\xi}, \frac{1}{f_{22}\eta}, \frac{1}{f_{33}\zeta}\right).$$

Nyilván a P_r reciprokja viszont a P pont.

2. Az előbbihez hasonlóan a háromszög csúcsaiból vetítjük a $P(\xi, \eta, \zeta)$ pontot. A $P_1 P$ egyenesnek szimmetria egyenesét vesszük a P_1 szög felezőjére vonatkozólag. A három szimmetrikus egyenes a P_i ponton halad át és ez a P pont *inverz* pontja. A koordinátái

$$\left(\frac{F_{11}}{\xi}, \frac{F_{22}}{\eta}, \frac{F_{33}}{\zeta}\right).$$

A P_i inverze viszont a P pont lesz.

3. Az adott $e \equiv u\xi + v\eta + w\zeta = 0$ egyenest metszésbe hozzuk az alapháromszög oldalaival. A metszési pontoknak ismét vesszük az egyes oldalközéppontokra vonatkoztatott tükörképeit. Az így nyert három pont egy egyenesbe esik, mely az adott egyenesnek *reciprokja*

$$e_r = \frac{f_{11}}{u}\xi + \frac{f_{22}}{v}\eta + \frac{f_{33}}{w}\zeta = 0.$$

4. Az $e \equiv u\xi + v\eta + w\zeta = 0$ egyenes Q_1 pontban metszi a $P_2 P_3$ oldalt. A $P_1 Q_1$-nek a P_1 szögfelezőjére vonatkozó tükörképe $P_1 Q_1'$, hol Q_1' ismét a $P_2 P_3$ oldal pontja. Hasonló pontok Q_2' és Q_3'. Ezek a pontok az e *inverz* egyenesébe esnek, melynek egyenlete

$$e_i = \frac{\xi}{F_{11}\, u} + \frac{\eta}{F_{22}\, v} + \frac{\zeta}{F_{33}\, w} = 0.$$

6. Az alapháromszög nevezetes pontjai.

Az alapháromszög nevezetes pontjainak baricentrikus koordinátáit adjuk a következőkben.

A magassági pont

$$M_0 \left(\frac{1}{F_{23}}, \frac{1}{F_{31}}, \frac{1}{F_{12}}\right)$$

A súlypont, mely önmagának reciprokja

$$S_0 \left(\frac{1}{\sqrt{f_{11}}}, \frac{1}{\sqrt{f_{22}}}, \frac{1}{\sqrt{f_{33}}}\right)$$

Ha a koordináták értékeinél négyzetgyök fordul elő, akkor más három pontot is kapunk ebből. Pl. a súlypont esetében

$$S_1 \left(-\frac{1}{\sqrt{f_{11}}}, \frac{1}{\sqrt{f_{22}}}, \frac{1}{\sqrt{f_{33}}}\right), \qquad S_2 \left(\frac{1}{\sqrt{f_{11}}}, -\frac{1}{\sqrt{f_{22}}}, \frac{1}{\sqrt{f_{33}}}\right),$$

$$S_3 \left(\frac{1}{\sqrt{f_{11}}}, \frac{1}{\sqrt{f_{22}}}, -\frac{1}{\sqrt{f_{33}}}\right)$$

A $P_1\, P_2\, P_3$-ba beírt és egyúttal a $\mathfrak{P}_1\, \mathfrak{P}_2\, \mathfrak{P}_3$ köré írható kör középpontja, mely önmagának inverze

$$I_0\, (\sqrt{F_{11}},\ \sqrt{F_{22}},\ \sqrt{F_{33}},)$$

A $P_1\, P_2\, P_3$ köré és a $\mathfrak{P}_1\, \mathfrak{P}_2\, \mathfrak{P}_3$-be beírt kör középpontja

$$K_0\, (F_{11} \sqrt{f_{11}} + F_{12} \sqrt{f_{22}} + F_{13} \sqrt{f_{33}},\ F_{21} \sqrt{f_{11}} + F_{22} \sqrt{f_{22}} + F_{23} \sqrt{f_{33}},$$
$$F_{31} \sqrt{f_{11}} + F_{32} \sqrt{f_{22}} + F_{33} \sqrt{f_{33}}).$$

Ha az érintő kör és az alapháromszög oldalainak érintési pontjait vetítjük a szemközti csúcsokból, a három egyenes egyetlen ponton megy keresztül, melynek koordinátái

$$G_0 \left(\frac{1}{F_{23} - \sqrt{F_{22} F_{33}}}, \frac{1}{F_{31} - \sqrt{F_{33} F_{11}}}, \frac{1}{F_{12} - \sqrt{F_{11} F_{22}}}\right)$$

Ez a *Gergonne—Brianchon*-féle pont. Hozzákapcsolt pontok

$$G_1\left(\frac{1}{F_{23}-\sqrt{F_{22}F_{33}}},\ \frac{1}{F_{31}+\sqrt{F_{33}F_{11}}},\ \frac{1}{F_{12}+\sqrt{F_{11}F_{22}}}\right) \text{ stb.}$$

A Gergonne—Brianchon pontok reciprokjai a *Nagel-féle pontok*

$$N_0\left(\frac{1}{F_{23}+\sqrt{F_{22}F_{33}}},\ \frac{1}{F_{31}+\sqrt{F_{33}F_{11}}},\ \frac{1}{F_{12}+\sqrt{F_{11}F_{22}}}\right)$$

$$N_1\left(\frac{1}{F_{23}+\sqrt{F_{22}F_{33}}},\ \frac{1}{F_{31}-\sqrt{F_{33}F_{11}}},\ \frac{1}{F_{12}-\sqrt{F_{11}F_{22}}}\right) \text{ stb.}$$

Tétel: A G_0N_0, G_1N_1, G_2N_2 és G_3N_3 egyenesek a magassági pont reciprokján mennek át

$$M_{0r}\left(\frac{F_{23}}{f_{11}},\ \frac{F_{31}}{f_{22}},\ \frac{F_{12}}{f_{33}}\right)$$

A Lemoine-féle pont, a súlypont inverze

$$L_0\left(F_{11}\sqrt{f_{11}},\ F_{22}\sqrt{f_{22}},\ F_{33}\sqrt{f_{33}}\right)$$

További pontok: a Longchamps-féle pont:[1]

$H\,(F_{11}F_{23}+F_{12}F_{13},\quad F_{22}F_{31}+F_{23}F_{21},\quad F_{33}F_{12}+F_{31}F_{32})$
továbbá

$U\,(f_{23},\ f_{31},\ f_{12})$

$\mathfrak{H}\,(F_{11}F_{23},\ F_{22}F_{31},\ F_{33}F_{12})$ az M_0 inverze

$\mathfrak{A}\,(F_{11}F_{23}+2\,F_{12}F_{13},\quad F_{22}F_{31}+2\,F_{23}F_{21},\quad F_{33}F_{12}+$
$+\,2\,F_{31}F_{32})$.

A $P_1\,\mathfrak{P}_1$, $P_2\,\mathfrak{P}_2$ és $P_3\,\mathfrak{P}_3$ abszolút pólusai

$C_1\,(0, -f_{13}, f_{12})$, $\quad C_2\,(f_{23}, 0, -f_{21})$, $\quad C_3\,(-f_{32}, f_{31}, 0)$

A C_1 egyúttal a P_2P_3 és $\mathfrak{P}_2\,\mathfrak{P}_3$ metszési pontja.

7. Az alapháromszög nevezetes egyenesei.

Az alapháromszög P_1 csúcsának abszolút polárisa

$$\mathfrak{P}_2\,\mathfrak{P}_3 \equiv f_{11}\,\xi + f_{12}\,\eta + f_{13}\,\zeta = 0$$

vagy röviden $\mathfrak{P}_2\,\mathfrak{P}_3\,[f_{11}, f_{12}, f_{13}]$. Hasonlókép a P_2 és P_3 csúcsok polárisai

$\mathfrak{P}_3\,\mathfrak{P}_1\,[f_{21}, f_{22}, f_{23}]$, $\qquad \mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_2\,[f_{31}, f_{32}, f_{33}]$.

[1] Jahresbericht d. D. M. V. 42. (1933) p. 17

Az M_0 abszolút polárisa, az *ortoaxis* $C_1 C_2 C_3$ $\left[\frac{1}{f_{23}}, \frac{1}{f_{31}}, \frac{1}{f_{12}}\right]$

Az *Euler-féle egyenes*, mely tartalmazza az M_0, H_0, U, $\mathfrak{H}$ és $\mathfrak{A}$ pontokat

$[(f_{22}F_{22}-f_{33}F_{33})F_{23}, (f_{33}F_{33}-f_{11}F_{11})F_{31}, (f_{11}F_{11}-f_{22}F_{22})F_{12}]$.

A *Lemoine-egyenes* a Gergonne—Brianchon pont duálisa. Erre az egyenesre jutunk, ha a $P_1 P_2 P_3$ köré írt körhöz a csúcsokban érintőt szerkesztünk. Ez a három érintő s szemközti oldalt olyan három pontban metszi, mely a Lemoine-egyenest határozza meg. Koordinátái

$$l_0 \left[\frac{1}{f_{23}-\sqrt{f_{22}f_{33}}}, \frac{1}{f_{31}-\sqrt{f_{33}f_{11}}}, \frac{1}{f_{12}-\sqrt{f_{11}f_{22}}}\right]$$

Hasonló egyenesek

$$l_1 \left[\frac{1}{f_{23}-\sqrt{f_{22}f_{33}}}, \frac{1}{f_{31}+\sqrt{f_{33}f_{11}}}, \frac{1}{f_{12}+\sqrt{f_{11}f_{22}}}\right] \text{ stb.}$$

A $P_1 P_2 P_3$ köré, illetőleg a $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_3$-ba iktató kör tengelye

$$t_0 [\sqrt{f_{11}}, \sqrt{f_{22}}, \sqrt{f_{33}}].$$

Ez egyúttal az S_0 harmonikáléja.

Hasonló egyenesek

$$t_1 [-\sqrt{f_{11}}, \sqrt{f_{22}}, \sqrt{f_{33}}] \ldots\ldots$$

Tétel: Az $l_0 t_0$, $l_1 t_1$, $l_2 t_2$ és $l_3 t_3$ pontok egy egyenesen vannak:

$$h[f_{11}f_{23}+f_{12}f_{13}, \quad f_{22}f_{31}+f_{23}f_{21}, \quad f_{33}f_{12}+f_{31}f_{32}]$$

Ez a *Longchamps-egyenes.*

A Lemoine-egyenes inverze a *Nagel-egyenes*

$$n_0 \left[\frac{1}{f_{23}+\sqrt{f_{22}f_{33}}}, \frac{1}{f_{31}+\sqrt{f_{33}f_{11}}}, \frac{1}{f_{12}+\sqrt{f_{11}f_{22}}}\right]$$

A $P_1 P_2 P_3$-ba írt kör centrumának harmonikáléja

$$i_0 \left[\frac{1}{\sqrt{F_{11}}}, \frac{1}{\sqrt{F_{22}}}, \frac{1}{\sqrt{F_{33}}}\right]$$

8. A körülírt és beírt kör.

A $P_1 P_2 P_3$ köré és a $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_3$-ba írható kör egyenlete

$$k_0 \equiv (f_{11}\xi^2 + f_{22}\eta^2 + f_{33}\zeta^2 + 2f_{12}\xi\eta + 2f_{23}\eta\zeta + 2f_{31}\zeta\xi) -$$
$$- (\sqrt{f_{11}}\,\xi + \sqrt{f_{22}}\,\eta + \sqrt{f_{33}}\,\zeta)^2 = 0$$

vagy

$$(f_{12}-\sqrt{f_{11}f_{22}})\,\xi\eta + (f_{23}-\sqrt{f_{22}f_{33}})\,\eta\zeta + (f_{31}-\sqrt{f_{33}f_{11}})\,\zeta\xi = 0.$$

Határátmenetre alkalmas formában

$$\frac{F_{33}}{f_{12}+\sqrt{f_{11}f_{22}}}\xi\eta+\frac{F_{11}}{f_{23}+\sqrt{f_{22}f_{33}}}\eta\zeta+\frac{F_{22}}{f_{31}+\sqrt{f_{33}f_{11}}}\zeta\xi=0.$$

A $P_1 P_2 P_3$-ba, illetőleg a $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_3$ köré írható kör egyenlete vonalkoordinátákban

$$(F_{12}-\sqrt{F_{11}F_{22}})\,uv+(F_{23}-\sqrt{F_{22}F_{33}})\,vw+$$
$$+(F_{31}-\sqrt{F_{33}F_{11}})\,wu=0.$$

Ha a beírt kör I_0 középpontjából merőlegeset bocsátunk az alapháromszög oldalaira, ezeken a merőlegeseken az I_0-tól egyenlő távolságban lévő pontok

$$Q_1\,(F_{11}(1+\lambda),\quad \sqrt{F_{11}F_{22}}+\lambda F_{12},\quad \sqrt{F_{11}F_{33}}+\lambda F_{13})$$
$$Q_2\,(\sqrt{F_{11}F_{22}}+\lambda F_{21},\quad F_{22}(1+\lambda),\quad \sqrt{F_{22}F_{33}}+\lambda F_{23})$$
$$Q_3\,(\sqrt{F_{11}F_{33}}+\lambda F_{31},\quad \sqrt{F_{22}F_{33}}+\lambda F_{32},\quad F_{33}(1+\lambda))$$

Kariya tétele[1] szerint a $P_1 Q_1$, $P_2 Q_2$ és $P_3 Q_3$ egyenesek egy ponton haladnak át:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{F_{22}F_{33}}+\lambda F_{23}},\ \frac{1}{\sqrt{F_{33}F_{11}}+\lambda F_{31}},\ \frac{1}{\sqrt{F_{11}F_{22}}+\lambda F_{12}}\right)$$

A $\lambda=-1$ esetében a *Gergonne—Brianchon*-féle pontot, $\lambda=1$ esetében a *Nagel*-pontot kapjuk.

Ezek a pontok minden λ érték mellett rajta vannak a $P_1P_2P_3$ köré írható

$$\begin{vmatrix} \sqrt{F_{22}F_{33}} & \sqrt{F_{33}F_{11}} & \sqrt{F_{11}F_{22}} \\ F_{23} & F_{31} & F_{12} \\ \dfrac{1}{\xi} & \dfrac{1}{\eta} & \dfrac{1}{\zeta} \end{vmatrix}=0.$$

kúpszeleten.

9. A háromszöggel összefüggő kúpszeletek.

1. Az adott $P_0\ (\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ pontot és reciprokját az alapháromszög csúcsaiból vetítjük a szemközti oldalakra. Az így nyert hat pont kúpszeletet határoz meg, melynek egyenlete

$$f_{11}\xi^2+f_{22}\eta^2+f_{33}\zeta^2-\frac{f_{11}\xi_0^2+f_{22}\eta_0^2}{\xi_0\eta_0}\xi\eta-\frac{f_{22}\eta_0^2+f_{33}\zeta_0^2}{\eta_0\zeta_0}\eta\zeta-$$
$$-\frac{f_{33}\zeta_0^2+f_{11}\xi_0^2}{\zeta_0\xi_0}\zeta\xi=0.$$

[1] L'Enseignement Mathématique 23 (1923) p. 192.

Ha az alappont S_0, mely önmagának reciprokja, akkor kapjuk a második Steiner-féle ellipszist

$$f_{11}\xi^2+f_{22}\eta^2+f_{33}\zeta^2-2\sqrt{f_{11}f_{22}}\,\xi\eta-2\sqrt{f_{22}f_{33}}\,\eta\zeta-2\sqrt{f_{33}f_{11}}\,\zeta\xi=0.$$

2. A P_0 (ξ_0, η_0, ζ_0) pontot és inverzét vetítjük az alapháromszög csúcspontjaiból a szemközti oldalakra. Az így kapott hat pont kúpszeleten van, melynek egyenlete

$$\frac{\xi^2}{F_{11}}+\frac{\eta^2}{F_{22}}+\frac{\zeta^2}{F_{33}}-\frac{F_{11}\eta_0^2+F_{22}\xi_0^2}{F_{11}F_{22}\xi_0\eta_0}\xi\eta-\frac{F_{22}\zeta_0^2+F_{33}\eta_0^2}{F_{22}F_{33}\eta_0\zeta_0}\eta\zeta-$$
$$-\frac{F_{33}\xi_0^2+F_{11}\zeta_0^2}{F_{33}F_{11}\zeta_0\xi_0}\zeta\xi=0.$$

3. Az e_0 egyenesnek és inverzének az alapháromszög oldalaival való metszési pontjait vetítve a szemközti csúcsokból, hat egyenest kapunk. Ez a hat egyenes ugyanannak a kúpszeletnek érintője, melynek egyenlete

$$F_{11}u^2+F_{22}v^2+F_{33}w^2-\frac{F_{11}u_0^2+F_{22}v_0^2}{u_0v_0}uv-$$
$$-\frac{F_{22}v_0^2+F_{33}w_0^2}{v_0w_0}vw-\frac{F_{33}w_0^2+F_{11}u_0^2}{w_0u_0}wu=0.$$

Ha az alapegyenes $\left[\frac{1}{\sqrt{F_{11}}}, \frac{1}{\sqrt{F_{22}}}, \frac{1}{\sqrt{F_{33}}}\right]$, mely önmagának inverze, kapjuk az első Steiner-féle ellipszist.

Ha az alappont I_0 $(\sqrt{F_{11}}, \sqrt{F_{22}}, \sqrt{F_{33}})$, mely önmagának inverze, akkor a kúpszelet

$$\frac{\xi^2}{F_{11}}+\frac{\eta^2}{F_{22}}+\frac{\zeta^2}{F_{33}}-\frac{2}{\sqrt{F_{11}F_{22}}}\xi\eta-\frac{2}{\sqrt{F_{22}F_{33}}}\eta\zeta-\frac{2}{\sqrt{F_{33}F_{11}}}\zeta\xi=0.$$

4. Ha az adott e_0 $[u_0, v_0, w_0)$ egyenest és reciprokját metszésbe hozzuk az alapháromszög oldalaival és a metszési pontokat vetítjük a szemközti csúcsokból, hat egyenest kapunk. Ez a hat egyenes ugyanannak a kúpszeletnek az érintője lesz, melynek egyenlete

$$\frac{u^2}{f_{11}}+\frac{v^2}{f_{22}}+\frac{w^2}{f_{33}}-\frac{f_{11}v_0^2+f_{22}u_0^2}{f_{11}f_{22}u_0v_0}uv-\frac{f_{22}w_0^2+f_{33}v_0^2}{f_{22}f_{33}v_0w_0}vw-$$
$$-\frac{f_{33}u_0^2+f_{11}w_0^2}{f_{33}f_{11}u_0w_0}wu=0.$$

Ha az alapegyenes $\left[\sqrt{f_{11}}, \sqrt{f_{22}}, \sqrt{f_{33}}\right]$, mely önmagának reciprokja, a kúpszelet

$$\frac{u^2}{f_{11}} + \frac{v^2}{f_{22}} + \frac{w^2}{f_{33}} - \frac{2}{\sqrt{f_{11}f_{22}}}uv - \frac{2}{\sqrt{f_{22}f_{33}}}vw - \frac{2}{\sqrt{f_{33}f_{11}}}wu = 0.$$

5.[1] Az adott P_0 pontból és inverzéből merőlegeseket bocsátunk az alapháromszög oldalaira. Az így nyert hat pont kúpszeletet határoz meg, melynek egyenlete

$$\begin{vmatrix} 0 & \xi_0 & \eta_0 & \zeta_0 \\ 1 & 0 & \zeta(F_{22}\xi_0 - F_{12}\eta_0) & \eta(F_{33}\xi_0 - F_{31}\zeta_0) \\ 1 & \zeta(F_{11}\eta_0 - F_{12}\xi_0) & 0 & \xi(F_{33}\eta_0 - F_{23}\zeta_0) \\ 1 & \eta(\xi_{11}\zeta_0 - F_{31}\xi_0) & \xi(F_{22}\zeta_0 - F_{23}\eta_0) & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ez a kúpszelet az Euklides-geometriában mindig kör. Ha az alappont I_0, mely önmagának inverze, kapjuk a beírt kört.

Ha pedig M_0 az alappont, akkor kapjuk a Feuerbach-féle kúpszeletet

$$F_{23}f_{12}f_{13}\xi^2 + F_{31}f_{23}f_{21}\eta^2 + F_{12}f_{31}f_{32}\zeta^2 - f_{12}(f_{31}F_{31} + f_{32}F_{32})\xi\eta -$$
$$- f_{23}(f_{12}F_{12} + f_{13}F_{13})\eta\zeta - f_{31}(f_{23}F_{23} + f_{21}F_{21})\zeta\xi = 0.$$

6. Az adott e_0 $[u_0, v_0, w_0]$ egyenesen és *reciprokján* megkeressük az alapháromszög csúcsainak merőleges társait. Ezeket a pontokat sorban összekötjük az alapháromszög csúcspontjaival. Ez a hat egyenes érintője lesz ugyanannak a kúpszeletnek, melynek egyenlete

$$\begin{vmatrix} 0 & u_0 & v_0 & w_0 \\ 1 & 0 & w(f_{22}u_0 - f_{12}v_0) & v(f_{33}u_0 - f_{31}w_0) \\ 1 & w(f_{11}v_0 - f_{12}u_0) & 0 & u(f_{33}v_0 - f_{23}w_0) \\ 1 & v(f_{11}w_0 - f_{31}u_0) & u(f_{22}w_0 - f_{23}v_0) & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ha az alapegyenes $\left[\sqrt{f_{11}}, \sqrt{f_{22}}, \sqrt{f_{33}}\right]$, mely önmagának reciprokja, kapjuk a $P_1P_2P_3$ köré írható kört.

10. Pont, egyenes és két kúpszelet összetartozása.

Adva a P_0 (ξ_0, η_0, ξ_0) pont, ehhez tartozik az

$$e_0 \equiv \frac{\xi}{\xi_0} + \frac{\eta}{\eta_0} + \frac{\zeta}{\zeta_0} = 0$$

harmonikálé. A P_0 polárisa a $\xi\eta\zeta = 0$ harmadrendű görbére vonatkozólag adja a $P_1P_2P_3$ köré írható kúpszeletet:

$$k_0 \equiv \xi_0\eta\zeta + \eta_0\zeta\xi + \zeta_0\xi\eta = 0.$$

[1] Archiv f. M. u. Ph. III. 11 (1907) p. 15.

Ugyanez vonalkoordinátákban

$$k_0 \equiv \xi_0^2 u^2 + \eta_0^2 v^2 + \zeta_0^2 w^2 - 2\xi_0 \eta_0 uv - 2\eta_0 \zeta_0 vw - 2\zeta_0 \xi_0 wu = 0.$$

Az $e_0\left[\frac{1}{\xi_0}, \frac{1}{\eta_0}, \frac{1}{\zeta_0}\right]$ egyenes pólusgörbéje a harmadosztályú $uvw = 0$ görbére vonatkozólag adja az érintő vagy beírt kúpszeletet:

$$b_0 \equiv \frac{vw}{\xi_0} + \frac{wu}{\eta_0} + \frac{uv}{\zeta_0} = 0.$$

Ugyanennek egyenlete pontkoordinátákban:

$$b_0 \equiv \frac{\xi^2}{\xi_0^2} + \frac{\eta^2}{\eta_0^2} + \frac{\zeta^2}{\zeta_0^2} - 2\frac{\xi\eta}{\xi_0\eta_0} - 2\frac{\eta\zeta}{\eta_0\zeta_0} - 2\frac{\zeta\xi}{\zeta_0\xi_0} = 0.$$

Pl. ha az $S_0\left(\frac{1}{\sqrt{f_{11}}}, \frac{1}{\sqrt{f_{22}}}, \frac{1}{\sqrt{f_{33}}}\right)$ pontból indulunk ki, akkor k_0 az első Steiner-féle ellipszis, b_0 pedig a második Steiner-féle ellipszis lesz.

11. Reciprok és inverz pontokból és egyenesekből nyerhető kúpszeletek.

1. Adott e_0 $[u_0, v_0, w_0]$ egyenesen lévő pontok koordinátái eleget tesznek az

$$u_0 \xi + v_0 \eta + w_0 \zeta = 0$$

egyenletnek. Ha az egyenes minden pontjának *reciprok* pontját vesszük, kapjuk a körülírt kúpszeletet:

$$k_r \equiv \frac{u_0}{f_{11}} \eta \zeta + \frac{v_0}{f_{22}} \zeta \xi + \frac{w_0}{f_{33}} \xi \eta = 0.$$

Egyenlete vonalkoordinátákban

$$k_r \equiv \frac{u_0^2}{f_{11}^2} u^2 + \frac{v_0^2}{f_{22}^2} v^2 + \frac{w_0^2}{f_{33}^2} w^2 - 2\frac{u_0 v_0}{f_{11} f_{22}} uv - 2\frac{v_0 w_0}{f_{22} f_{33}} vw - 2\frac{w_0 u_0}{f_{33} f_{11}} wu = 0.$$

2. Ha az e_0 egyenes pontjainak *inverz* pontjait vesszük, származik az újabb körülírt kúpszelet

$$k_i \equiv F_{11} u_0 \eta \zeta + F_{22} v_0 \zeta \xi + F_{33} w_0 \xi \eta = 0.$$

Ha az alapegyenes $\left[\frac{1}{f_{23} + \sqrt{f_{22} f_{33}}}, \frac{1}{f_{31} + \sqrt{f_{33} f_{11}}}, \frac{1}{f_{12} + \sqrt{f_{11} f_{22}}}\right]$, akkor k_i a $P_1 P_2 P_3$ köré írható kör lesz.

3. Adott $P_0\,(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ ponton átmenő egyenesek koordinátái eleget tesznek a

$$\xi_0\, u + \eta_0\, v + \zeta_0\, w = 0.$$

egyenletnek. Ha az itt szereplő összes egyenesek *reciprokjait* veszszük, kapjuk a beírt kúpszeletet, melynek egyenlete

$$b_r \equiv f_{11}\,\xi_0\, vw + f_{22}\,\eta_0\, wu + f_{33}\,\zeta_0\, uv = 0.$$

Ha alappontul az $S_0\left(\frac{1}{\sqrt{f_{11}}}, \frac{1}{\sqrt{f_{22}}}, \frac{1}{\sqrt{f_{33}}}\right)$ súlypontot választjuk, ered a második Steiner-féle ellipszis.

4. A P_0 ponton átmenő összes egyenesek *inverzeit* véve kapjuk a

$$b_i \equiv \frac{\xi_0}{F_{11}}\, vw + \frac{\eta_0}{F_{22}}\, wu + \frac{\zeta_0}{F_{33}}\, uv = 0.$$

beírt kúpszeletet.

A $$\xi_0 = F_{11}\,(F_{23} - \sqrt{F_{22}F_{33}}) \ldots\ldots\ldots\ldots$$

pont esetében kapjuk a beírt kört:

$$(F_{23} - \sqrt{F_{22}F_{33}})\, vw + (F_{31} - \sqrt{F_{33}F_{11}})\, wu + (F_{12} - \sqrt{F_{11}F_{22}})\, uv = 0.$$

Az $L_0\,(F_{11}\sqrt{f_{11}}, F_{22}\sqrt{f_{22}}, F_{33}\sqrt{f_{33}})$ Lemoine-pont esetében pedig ismét a második Steiner-ellipszisre jutunk.

12. Reciprok pontokból és egyenesekből származó C_3 és Γ_3.[1]

1. Ha a $P\,(\xi, \eta, \zeta)$ és reciprokja $P_r\left(\frac{1}{f_{11}\xi}, \frac{1}{f_{22}\eta}, \frac{1}{f_{33}\zeta}\right)$ úgy változnak, hogy összekötő egyenesük átmegy a fix $P_0\,(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ ponton, akkor áll

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi_0 & \eta_0 & \zeta_0 \\ \frac{1}{f_{11}\xi} & \frac{1}{f_{22}\eta} & \frac{1}{f_{33}\zeta} \end{vmatrix} = 0.$$

Ez a harmadrendű görbe, C_3 átmegy a $P_1P_2P_3$ csúcspontjain, a P_0 ponton és reciprokján, az $S_0\left(\frac{1}{\sqrt{f_{11}}}, \frac{1}{\sqrt{f_{22}}}, \frac{1}{\sqrt{f_{11}}}\right)$ ponton és asszociáltjain. Ha a P_0 fix pont az M_0 reciprokja, vagyis $M_{0r}\left(\frac{F_{32}}{f_{11}}, \frac{F_{13}}{f_{22}}, \frac{F_{21}}{f_{33}}\right)$, akkor a keletkező C_3 a Lucas-féle görbe.

[1] Zeitschrift für math. u. naturw. Unterricht. 43. (1912) p. 294.

2. Ha az $e\ [u, v, w]$ egyenes és reciprokja $e_r \left[\frac{f_{11}}{u}, \frac{f_{22}}{v}, \frac{f_{33}}{w}\right]$, úgy változnak, hogy metszéspontjuk a fix $[u_0, v_0, w_0]$ egyenesre esik, keletkezik a harmadosztályú Γ_3,

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ u_0 & v_0 & w_0 \\ \frac{f_{11}}{u} & \frac{f_{22}}{v} & \frac{f_{33}}{w} \end{vmatrix} = 0.$$

Ezt a Γ_3-t érinti az $[u_0, v_0, w_0]$ és reciprokja, továbbá a $[\sqrt{f_{11}}, \sqrt{f_{22}}, \sqrt{f_{33}}]$ egyenes.

Ha a fix alapegyenes

$e_0\,[f_{11}\,f_{23} + f_{12}\,f_{13},\ f_{22}\,f_{31} + f_{23}\,f_{21},\ f_{33}\,f_{12} + f_{31}\,f_{32}]$, akkor kapjuk a Darboux-féle osztálygörbét.

13. Az inverz pontokból és egyenesekből származó C_3 és Γ_3.

1. Ha a $P\,(\xi, \eta, \zeta)$ pont és inverze $P_i \left(\frac{F_{11}}{\xi}, \frac{F_{22}}{\eta}, \frac{F_{33}}{\zeta}\right)$ úgy változnak, hogy összekötő egyenesük átmenjen a fix $P_0\,(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ ponton, akkor kapjuk a harmadrendű C_3-t

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi_0 & \eta_0 & \zeta_0 \\ \frac{F_{11}}{\xi} & \frac{F_{22}}{\eta} & \frac{F_{33}}{\zeta} \end{vmatrix} = 0.$$

Ez a C_3 átmegy az alapháromszög csúcsain, a P_0 ponton és inverzén, továbbá az I pontokon.

Nevezetes tulajdonsága görbénknek, hogy az I_0, I_1, I_2 és I_3 pontokhoz tartozó érintők átmennek a P_0 ponton.

Ha

$$P_0 = H\,(F_{11}\,F_{23} + F_{12}\,F_{13},\ F_{22}\,F_{31} + F_{23}\,F_{21},\ F_{33}\,F_{12} + \\ + F_{31}\,F_{32}),$$

akkor a Darboux-féle rendgörbére jutunk.

2. Ha az $e\ [u, v, w]$ egyenes és inverze $e_i \left[\frac{1}{F_{11}u}, \frac{1}{F_{22}v}, \frac{1}{F_{33}w}\right]$

úgy változnak, hogy metszési pontjuk a fix $e_0\,[u_0, v_0, w_0]$ egyenesre esik, kapunk egy harmadosztályú görbét, Γ_3-t :

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ u_0 & v_0 & w_0 \\ \frac{1}{F_{11}u} & \frac{1}{F_{22}v} & \frac{1}{F_{33}w} \end{vmatrix} = 0.$$

Ennek a Γ_3-nak érintője az e_0 és inverze, továbbá az

$$\left[\frac{1}{\sqrt{F_{11}}}, \frac{1}{\sqrt{F_{22}}}, \frac{1}{\sqrt{F_{33}}}\right] \text{ egyenes.}$$

Ha

$$e_0 = \left[\frac{f_{23}}{F_{11}}, \frac{f_{31}}{F_{22}}, \frac{f_{12}}{F_{33}}\right],$$

akkor keletkezik a Lucas-féle Γ_3.

14. Az alapháromszöggel összefüggő harmadrendű görbék.

Az alapháromszöghöz fontos harmadrendű görbéket rendelhetünk. Ezek összeállítását adjuk a következőkben.

1. A Lucas- féle C_3.[1]

Az adott $P\,(\xi, \eta, \zeta)$ pontot vetítjük $P_1 P_2 P_3$ alapháromszög csúcsaiból a szemközti oldalakra. Az így nyert pontokat összekötjük a P_1, P_2 és P_3-al, vagyis ezekben a pontokban az alapháromszög oldalaira merőlegeseket emelünk. A három merőleges egy ponton megy át, ha áll

$$\begin{vmatrix} F_{13}\eta - F_{12}\zeta & F_{11}\zeta & -F_{11}\eta \\ -F_{22}\zeta & F_{21}\zeta - F_{23}\xi & F_{22}\xi \\ F_{33}\eta & -F_{33}\xi & F_{32}\xi - F_{31}\eta \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

Ha az (1)-et szorozzuk az $|F_{ik}|$ determinánssal, ered

$$(f_{11}\xi + f_{12}\eta)(f_{22}\eta + f_{23}\zeta)(f_{33}\zeta + f_{31}\xi) - (f_{11}\xi + f_{13}\zeta)$$
$$(f_{22}\eta + f_{21}\xi)(f_{33}\xi + f_{32}\eta) = 0.$$

Ez a Lucas-féle harmadrendű görbe.

[1] Jahresbericht d. D. M. V. 42. (1933) p. 17.

A Lucas-féle C_3 keletkezik úgy is, ha keressük azokat a pontokat, melyek reciprokjukkal összekötve átmennek a fix $\left(\frac{F_{23}}{f_{11}}, \frac{F_{31}}{f_{22}}, \frac{F_{12}}{f_{33}}\right)$ ponton, vagyis az M_0 reciprokján. Igy görbénk egyenlete írható

$$\begin{vmatrix} f_{11}\xi^2 & f_{22}\eta^2 & f_{33}\zeta^2 \\ F_{23}\xi & F_{31}\eta & F_{12}\zeta \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Görbénk származtatható még a következő módon is : A P pontot az alapháromszög csúcsaiból vetítjük a szemközti oldalakra. Ezeknek a pontoknak merőleges társait vesszük ugyanezen az oldalon. A három pont egy egyenesbe esik, ha P a Lucas-görbe pontja.

A Lucas-görbe átmegy az alapháromszög csúcsain, az M_0 ponton és reciprokján, az S_0 ponton és asszociáltjain, az U (f_{23}, f_{31}, f_{12}) ponton és a Gergonne—Brianchon-féle ponton. További tulajdonsága görbénknek, hogy a P_1, P_2, P_3 és az $M_{0'}$ pontokban rajzolt érintők átmennek az M_0 ponton. Hasonlókép az S_0, S_1, S_2 és S_3 pontokhoz tartozó érintők az $M_{0'}$ pontban metszik egymást.

Az Euklides-féle geometriában a Lucas-rendgörbe egyenlete

$$a^2\frac{\eta-\zeta}{\eta+\zeta} + b^2\frac{\zeta-\xi}{\zeta+\xi} + c^2\frac{\xi-\eta}{\xi+\eta} = 0.$$

2. A W-rendgörbe.

Az adott P (ξ, η, ζ) pontot összekötjük a $P_1 P_2 P_3$ csúcsaival. Az így kapott egyeneseknek az oldalakra vonatkozó harmonikus társait vesszük és ezekre a csúcsokban merőlegeseket emelünk. Ez a három merőleges egy ponton megy át, ha áll

$$(F_{11}\eta + F_{12}\xi)(F_{22}\zeta + F_{23}\eta)(F_{33}\xi + F_{31}\zeta) - (F_{11}\zeta + F_{13}\xi)$$
$$(F_{22}\xi + F_{21}\eta)(F_{33}\eta + F_{32}\zeta) = 0.$$

Ez a harmadrendű W-görbe egyenlete.

Ugyanerre a görbére jutunk, ha keressük azokat a pontokat, melyek inverzükkel összekötve átmennek a fix (f_{23}, f_{31}, f_{12}) ponton. Igy görbénk egyenlete lesz

$$\begin{vmatrix} F_{11} & F_{22} & F_{33} \\ f_{23}\xi & f_{31}\eta & f_{12}\zeta \\ \xi^2 & \eta^2 & \zeta^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Újabb származtatása görbénknek a következő: A P pontot összekötjük az alapháromszög csúcsaival. Az összekötő egyeneseknek az oldalakra vonatkozó harmonikus társain megkeressük a csúcsokhoz tartozó merőleges pontokat. Ez a három pont egy egyenesbe esik, ha áll

$$\begin{vmatrix} f_{21}\eta - f_{31}\zeta & -f_{11}\eta & f_{11}\zeta \\ f_{22}\xi & f_{32}\zeta - f_{12}\xi & -f_{22}\zeta \\ -f_{33}\xi & f_{33}\eta & f_{13}\xi - f_{23}\eta \end{vmatrix} = 0.$$

Görbénk megengedi az inverz transzformációt.

Az Euklides-féle geometriában egyenlete

$$a^2\frac{\eta-\zeta}{\xi} + b^2\frac{\zeta-\xi}{\eta} + c^2\frac{\xi-\eta}{\zeta} = 0.$$

3. Az L-rendgörbe.

A $P(\xi, \eta, \zeta)$ pontot az alapháromszög csúcsaiból vetítjük a szemközti oldalakra. Vesszük az így nyert pontok merőleges társainak harmonikus társait ugyanazon az oldalon. Ha ez a három pont egy egyenesbe esik, akkor áll

$$(f_{11}\xi + f_{12}\eta)(f_{22}\eta + f_{23}\zeta)(f_{33}\zeta + f_{31}\xi) + (f_{11}\xi + f_{13}\zeta)$$
$$(f_{22}\eta + f_{21}\xi)(f_{33}\zeta + f_{32}\eta) = 0.$$

Görbénk megengedi a reciprok transzformációt.

4. A Σ-rendgörbe.

Adott $P(\xi, \eta, \zeta)$ pont esetében vesszük a P_1P, P_2P és P_3P egyeneseknek az alapháromszög oldalaira vonatkozó harmonikus társait. Majd ezekre az egyenesekre merőlegeseket emelünk a csúcsokban. Végül megkeressük ezeknek az egyeneseknek a metszési pontjait a szemközti oldalakkal. Ha ez a három pont egy egyenesbe esik, akkor áll

$$(F_{11}\eta + F_{12}\xi)(F_{22}\zeta + F_{23}\eta)(F_{33}\xi + F_{31}\zeta) + (F_{11}\zeta + F_{13}\xi)$$
$$(F_{22}\xi + F_{21}\eta)(F_{33}\eta + F_{32}\zeta) = 0.$$

Ez a harmadrendű Σ-görbe.

Görbénk megengedi az inverz transzformációt.

5. A Δ-rendgörbe.

Adva a $P(\xi, \eta, \zeta)$ pont. A P_1P, P_2P és P_3P egyeneseknek a harmonikus társait vesszük az alapháromszög oldalaira vonatkozólag. Ezek az újabb egyenesek metszik a szemközti oldalakat.

Az így nyert pontokban az alapháromszög oldalaira merőlegeseket emelünk. Ez a három merőleges egy ponton megy át, ha áll

$$\begin{vmatrix} F_{13}\eta + F_{12}\zeta & -F_{11}\zeta & -F_{11}\eta \\ -F_{22}\zeta & F_{21}\zeta + F_{23}\xi & -F_{22}\xi \\ -F_{33}\eta & -F_{33}\xi & F_{32}\xi + F_{31}\eta \end{vmatrix} = 0.$$

vagy $|F_{ik}|$-val szorozva

$$(f_{11}\xi - f_{21}\eta)(f_{22}\eta - f_{32}\zeta)(f_{33}\zeta - f_{13}\xi) + (f_{11}\xi - f_{31}\zeta)$$
$$(f_{22}\eta - f_{12}\xi)(f_{33}\zeta - f_{23}\eta) = 0.$$

Ez a harmadrendű Δ-görbe, mely reciprok transzformációval önmagába megy át.

Görbénket a következő módon is származtathatjuk : A P pontot vetítjük az alapháromszög csúcsaiból a szemközti oldalakra. A vetítési pontok oldalakra eső harmonikus társainak merőleges társait vesszük az oldalakon. Ezek a pontok egy egyenesbe esnek, ha a P pont a Δ-görbén van.

Az Euklides-féle geometriában görbénk egyenlete

$$a^2\frac{\eta+\zeta}{\eta-\zeta} + b^2\frac{\zeta+\xi}{\zeta-\xi} + c^2\frac{\xi+\eta}{\xi-\eta} = 0.$$

6. A Simson—Wallace-féle C_3.[1]

Adott $P(\xi, \eta, \zeta)$ pontból merőlegeseket bocsátunk a $P_1 P_2 P_3$ alapháromszög oldalaira. A három talppont egy egyenesbe esik, ha áll

$$(F_{11}\eta - F_{12}\xi)(F_{22}\zeta - F_{23}\eta)(F_{33}\xi - F_{31}\zeta) + (F_{11}\zeta - F_{13}\xi)$$
$$(F_{22}\xi - F_{21}\eta)(F_{33}\eta - F_{32}\zeta) = 0. \dots\dots\dots\dots (1)$$

Ez a Simson—Wallace-féle harmadrendű görbe, mely megengedi az inverz transzformációt.

A görbét származtathatjuk a következő módon is: A $P_1 P$, $P_2 P$ és $P_3 P$ egyeneseket sorban metszésbe hozzuk a $\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3$, $\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_1$ és $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ egyenesekkel. A három pont egy egyenesbe esik, ha áll

$$\begin{vmatrix} f_{13}\zeta + f_{12}\eta & -f_{11}\eta & -f_{11}\zeta \\ -f_{22}\xi & f_{21}\xi + f_{23}\zeta & -f_{22}\zeta \\ -f_{33}\xi & -f_{33}\eta & f_{32}\eta + f_{31}\xi \end{vmatrix} = 0.$$

Szorozva ezt $|f_{ik}|$ determinánssal, kapjuk az (1)-et.

Az Euklides-féle geometriában görbénk egyenlete

$$(\xi + \eta + \zeta)(c^2\xi\eta + a^2\eta\zeta + b^2\zeta\xi) = 0.$$

[1] Archiv für Math. u. Physik. III, 11. (1907) p. 16.

Görbénk tehát degenerálódik a végtelenben lévő egyenesbe és a körülírt körbe.

7. A D-rendgörbe.

A $P(\xi, \eta, \zeta)$ pontot az alapháromszög csúcsaiból vetítjük a szemközti oldalakra. Ezek harmonikus társainak a merőleges hozzátartozóit vesszük ugyanazon az oldalon. Az utóbbi pontok harmonikus társai egy egyenesbe esnek, ha áll

$$(f_{11}\xi - f_{12}\eta)(f_{22}\eta - f_{23}\zeta)(f_{33}\zeta - f_{31}\xi) - (f_{11}\xi - f_{13}\zeta)(f_{22}\eta - f_{21}\xi)(f_{33}\zeta - f_{32}\eta) = 0.$$

Ez a harmadrendű D-görbe.

Ugyanerre a görbére jutunk, ha keressük azokat a pontokat, melyek a reciprokjukkal összekötve átmennek a fix

$$\left(\frac{f_{11}f_{23} + f_{12}f_{13}}{f_{11}}, \frac{f_{22}f_{31} + f_{23}f_{21}}{f_{22}}, \frac{f_{33}f_{12} + f_{31}f_{32}}{f_{33}}\right)$$

ponton. Görbénk egyenlete ez alapon írható

$$\begin{vmatrix} (f_{11}f_{23} + f_{12}f_{13})\xi & (f_{22}f_{31} + f_{23}f_{21})\eta & (f_{33}f_{12} + f_{31}f_{32})\zeta \\ f_{11}\xi^2 & f_{22}\eta^2 & f_{33}\zeta^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

A görbe megengedi a reciprok transzformációt.

8. A Darboux-féle C_3.

A $P(\xi, \eta, \zeta)$ pontból merőlegeseket emelünk az alapháromszög oldalaira. A talppontokat összekötve a szemközti csúcsokkal, kapunk három egyenest. Ez a három egyenes egy ponton megy át, ha áll

$$(F_{11}\eta - F_{12}\xi)(F_{22}\zeta - F_{23}\eta)(F_{33}\xi - F_{31}\zeta) - (F_{11}\zeta - F_{13}\xi)(F_{22}\xi - F_{21}\eta)(F_{33}\eta - F_{32}\zeta) = 0.$$

Ez a Darboux-féle C_3 egyenlete.

Ugyanerre a görbére jutunk akkor is, ha azokat a pontokat keressük, melyek inverzükkel összekötve átmennek a fix

$$H(F_{11}F_{23} + F_{12}F_{13}, \quad F_{22}F_{31} + F_{23}F_{21}, \quad F_{33}F_{12} + F_{31}F_{32})$$

ponton. Ez alapon görbénk egyenlete

$$\begin{vmatrix} (F_{11}F_{23}+F_{12}F_{13})\xi & (F_{22}F_{31}+F_{23}F_{21})\eta & (F_{33}F_{12}+F_{31}F_{32})\zeta \\ \xi^2 & \eta^2 & \zeta^2 \\ F_{11} & F_{22} & F_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Görbénk megengedi az inverz transzformációt.

Görbénket még a következő módon is származtathatjuk: A P pontot összekötjük az alapháromszög csúcsaival, az összekötő egyenesekre a csúcsokban merőlegeseket emelünk. Ezeket az egyeneseket metszésbe hozzuk az alapháromszög oldalaival. Ha ez a három pont egy egyenesbe esik, kapjuk a Darboux-féle C_3-t. A Darboux-féle C_3 további tulajdonsága, hogy a P_1, P_2, P_3 és a H pontokban hozzá rajzolt érintők átmennek a H_i ponton.

Az I_0, I_1, I_2 és I_3 pontokhoz tartozó érintők pedig áthaladnak a Longchamps-féle H ponton.[1]

15. Az alapháromszöggel összefüggő harmadosztályú görbék.

A dualitás alapján a harmadrendű görbékhez hasonlóan harmadosztályú görbéket is rendelhetünk az alapháromszöghöz.

I. A Lucas-féle harmadosztályú görbe.

Adva az $e\ [u, v, w]$ egyenes. Ezt metszésbe hozzuk a $P_1 P_2 P_3$ oldalaival. A metszési pontokat vetítjük a szemközti csúcsokból. Ezeken az egyeneseken vesszük a csúcsok merőleges társait. Ez a három pont egy egyenesbe esik, ha áll

$$\begin{vmatrix} f_{13} v - f_{12} w & f_{11} w & -f_{11} v \\ -f_{22} w & f_{21} w - f_{23} u & f_{22} u \\ f_{33} v & -f_{33} u & f_{32} u - f_{31} v \end{vmatrix} = 0.$$

Szorozva ezt $|f_{ik}|$-val, kapjuk:

$$(F_{11} u + F_{12} v)(F_{22} v + F_{23} w)(F_{33} w + F_{31} u) - (F_{11} u + F_{13} w)$$
$$(F_{22} v + F_{21} u)\ (F_{33} w + F_{32} v) = 0.$$

Ez a Lucas-féle harmadosztályú görbe, mely megengedi az inverz transzformációt.

A Lucas-féle harmadosztályú görbére jutunk úgyis, ha azokat az egyeneseket keressük, melyek inverzüket a fix $\left[\frac{f_{23}}{F_{11}}, \frac{f_{31}}{F_{22}}, \frac{f_{12}}{F_{33}}\right]$ egyenesben metszik.

Igy a görbe egyenlete

$$\begin{vmatrix} F_{11} u^2 & F_{22} v^2 & F_{33} w^2 \\ f_{23} u & f_{31} v & f_{12} w \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

[1] Jahresbericht d. D. M. V. 42 (1933) p. 17.

Görbénket származtathatjuk még a következő módon is: Az e egyenesnek az alapháromszög oldalaival való metszési pontjait vetítjük a szemközti csúcsokból. Ezekre az egyenesekre a csúcsokban emelt merőlegesek egy ponton mennek át, ha e érintője a Lucas-féle Γ_3-nak.

Görbénk egyenlete az euklidesi geometriában

$$a^2u^2(v-w)+b^2v^2(w-u)+c^2w^2(u-v)=0.$$

II. A W-osztálygörbe.

Az $e\ [u, v, w]$ egyenes az alapháromszög oldalait három pontban metszi. Ennek a három pontnak harmonikus társát vesszük a csúcsokra vonatkozólag. Ebben a három utóbbi pontban merőlegest emelünk az alapháromszög oldalaira. Ez a három egyenes egy ponton megy át, ha áll

$$\begin{vmatrix} F_{13}w - F_{12}v & F_{11}v & -F_{11}w \\ -F_{22}u & F_{21}u - F_{23}w & F_{22}w \\ F_{33}u & -F_{33}v & F_{32}v - F_{31}u \end{vmatrix} = 0.$$

Ez a harmadosztályú W-görbe.

Ezt szorozva az $|F_{ik}|$ determinánssal, ered

$$(f_{11}v+f_{21}u)(f_{22}w+f_{32}v)(f_{33}u+f_{13}w)-(f_{11}w+f_{31}u)$$
$$(f_{22}u+f_{12}v)(f_{33}v+f_{23}w)=0.$$

A W-osztálygörbére jutunk úgy is, hogy keressük azokat az egyeseket, melyek reciprokjukat a fix $[F_{23}, F_{31}, F_{12}]$ egyenesben metszik. Ez alapon egyenlete

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{22} & f_{33} \\ F_{23}u & F_{31}v & F_{12}w \\ u^2 & v^2 & w^2 \end{vmatrix} = 0.$$

A görbe egyenlete az euklidesi geometriában

$$a^2\frac{v-w}{v+w}+b^2\frac{w-u}{w+u}+c^2\frac{u-v}{u+v}=0.$$

III. Az L-osztálygörbe.

Az $e\ [u, v, w]$ egyenesnek az alapháromszög oldalaival való metszési pontjait vetítjük a szemközti csúcsokból. Ezekre az egyenesekre a csúcsokból merőlegeseket emelünk. Ezek harmonikus társai egy ponton mennek át, ha áll

$$(F_{11}u+F_{12}v)(F_{22}v+F_{23}w)(F_{33}w+F_{31}u)+(F_{11}u+F_{13}w)$$
$$(F_{22}v+F_{21}u)(F_{33}w+F_{32}v)=0.$$

Ez az L-osztálygörbe, mely megengedi az inverz transzformációt.

IV. A Σ-osztálygörbe.

Az $e[u, v, w]$ egyenes esetében vesszük az alapháromszög oldalaival való metszési pontok harmonikus társait. Majd az utóbbi pontok ugyanazon oldalra eső merőleges társait vetítjük a szemközti csúcsból. Ez a három egyenes egy ponton halad át, ha áll

$$(f_{11} v + f_{12} u)(f_{22} w + f_{23} v)(f_{33} u + f_{31} w) + (f_{11} w + f_{13} u)$$
$$(f_{22} u + f_{21} v)(f_{33} v + f_{32} w) = 0.$$

Ez a Σ-osztálygörbe, mely megengedi a reciprok transzformációt.

V. A Δ-osztálygörbe.

Az $e[u, v, w]$ egyenest metszésbe hozzuk az alapháromszög oldalaival. A metszési pontok harmonikus társait összekötjük a szemközti csúcsokkal. Ezekre az egyenesekre a csúcsokban merőlegeseket emelünk. Ez a három egyenes egy ponton megy át, ha áll

$$(F_{11} u - F_{12} v)(F_{22} v - F_{23} w)(F_{33} w - F_{31} u) + (F_{11} u - F_{13} w)$$
$$(F_{22} v - F_{21} u)(F_{33} w - F_{32} v) = 0.$$

Ez a harmadosztályú Δ-görbe, mely megengedi az inverz transzformációt.

Újabb származtatása görbénknek a következő : Az e egyenest metszésbe hozzuk az alapháromszög oldalaival. A metszési pontok harmonikus társait összekötjük az alapháromszög csúcsaival. A csúcsok merőleges társait keressük az egyeneseken. Az így kapott három pont egy egyenesbe esik, ha áll

$$\begin{vmatrix} f_{13} v + f_{12} w & -f_{11} w & -f_{11} v \\ -f_{22} w & f_{21} w + f_{23} u & -f_{22} u \\ -f_{33} v & -f_{33} u & f_{32} u + f_{31} v \end{vmatrix} = 0.$$

Ez a Δ-osztálygörbe egyenlete újabb alakban.

Az Euklides-féle geometriában görbénk egyenlete

$$(u v + v w + w u)(a^2 u + b^2 v + c^2 w) = 0.$$

Jelentése a Lemoine-féle pont és a második Steiner-féle ellipszis.

VI. A Wallace-féle Γ_3.[1]

Adva az $e[u, v, w]$ egyenes, ezt metszésbe hozzuk a $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_3$ oldalaival, majd a metszési pontokat összekötjük az alapháromszög

[1] Archiv d. Math. u. Phys. III, 11. (1907) p. 17. — *Dörrie:* Triumph d. Mathematik, 1933, p. 224.

P_1, P_2 és P_3 csúcspontjaival. Az így kapott három egyenes egy ponton megy át, ha áll

$$(f_{11} v - f_{12} u)\,(f_{22} w - f_{23} v)\,(f_{33} u - f_{31} w) + (f_{11} w - f_{13} u)\,(f_{22} u - f_{21} v)\,(f_{33} v - f_{32} w) = 0. \qquad (1)$$

Ez a Wallace-féle harmadosztályú görbe, mely megengedi a reciprok transzformációt.

Újabb származtatása mutatja, hogy görbénk fordítottja a Simson—Wallace-féle C_3-nak. Az e egyenest metszésbe hozzuk a $P_1 P_2 P_3$ alapháromszög oldalaival. Az egyes metszési pontokban az oldalakra emelt merőlegesek egy ponton mennek keresztül, ha áll

$$\begin{vmatrix} F_{12} v + F_{13} w & - F_{11} v & - F_{11} w \\ - F_{22} u & F_{23} w + F_{21} u & - F_{22} w \\ - F_{33} u & - F_{33} v & F_{31} u + F_{32} v \end{vmatrix} = 0.$$

Szorozva az $| F_{ik} |$ determinánssal kapjuk az (1)-et.

Az euklidesi geometriában a görbe egyenlete:

$$a^2 \frac{v + w}{v - w} + b^2 \frac{w + u}{w - u} + c^2 \frac{u + v}{u - v} = 0.$$

VII. A D-osztálygörbe.

Az $e\ [u, v, w]$ egyenesnek az alapháromszög oldalain való metszési pontok harmonikus társait vetítjük a szemközti csúcsokból. Ezekre az egyenesekre a csúcsokban merőlegeseket emelünk. E merőlegesek harmonikus társai egy egyenesen mennek át, ha áll

$$(F_{11} u - F_{12} v)\,(F_{22} v - F_{23} w)\,(F_{33} w - F_{31} u) - (F_{11} u - F_{13} w)\,(F_{22} v - F_{21} u)\,(F_{33} w - F_{31} v) = 0.$$

Ez a harmadrendű D-osztálygörbe, mely megengedi az inverz transzformációt.

Görbénk származtatható úgy is, hogy keressük azokat az egyeneseket, melyek inverzüket a fix

$$\left[\frac{F_{11} F_{23} + F_{12} F_{13}}{F_{11}},\ \frac{F_{22} F_{31} + F_{23} F_{21}}{F_{22}},\ \frac{F_{33} F_{12} + F_{31} F_{32}}{F_{33}}\right]$$

egyenesben metszik. Igy a D-osztálygörbe egyenlete

$$\begin{vmatrix} (F_{11} F_{23} + F_{12} F_{13})\, u & (F_{22} F_{31} + F_{23} F_{21})\, v & (F_{33} F_{12} + F_{31} F_{32})\, w \\ F_{11} u^2 & F_{22} v^2 & F_{33} w^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

VIII. A Darboux-féle Γ_3.

Adva az $e\,[u, v, w]$ egyenes. Megkeressük ezen az egyenesen a P_1, P_2 és P_3 merőleges társait és ezeket a pontokat sorban vetítjük a P_1, P_2, P_3 pontokból az alapháromszög szemközti oldalaira. A három metszési pont egy egyenesbe esik, ha áll

$$(f_{11} v - f_{12} u)\ (f_{22} w - f_{23} v)\ (f_{33} u - f_{31} w) - (f_{11} w - f_{13} u)\ (f_{22} u - f_{21} v)\ (f_{33} v - f_{32} w) = 0.$$

Ez a Darboux-féle harmadosztályú görbe. Ugyanerre a görbére jutunk úgy is, ha keressük azokat az egyeneseket, melyek reciprokjukkal a fix

$$[f_{11} f_{23} + f_{12} f_{13},\ f_{22} f_{31} + f_{23} f_{21},\ f_{33} f_{12} + f_{31} f_{32}]$$

egyenesen metszik egymást. Ez alapon a görbe egyenlete

$$\begin{vmatrix} (f_{11} f_{23} + f_{12} f_{13})\, u & (f_{22} f_{31} + f_{23} f_{21})\, v & (f_{33} f_{12} + f_{31} f_{32})\, w \\ u^2 & v^2 & w^2 \\ f_{11} & f_{22} & f_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Görbénk megengedi a reciprok transzformációt.

A Darboux-osztálygörbére jutunk a következő módon is: Az e egyenest metszésbe hozzuk az alapháromszög oldalaival. Ezek merőleges társait vesszük ugyanezeken az oldalakon s ezeket vetítjük a szemközti csúcsokból. Ha a három egyenes egy ponton megy át, újra kapjuk a Darboux-féle Γ_3 egyenletét.

16. Összefüggések a harmadrendű és harmadosztályú görbék között.

Az egyes harmadrendű és harmadosztályú görbék között kapcsolatok vannak, melyek alapján részint a két görbe pontjai, vagy érintői felelnek meg egymásnak, vagy az egyik görbe pontjaihoz egyértelműen tartoznak a másik görbe érintői. A következőkben ilyen fontosabb kapcsolatokat sorolunk fel.

1—7. A Lucas-rendgörbe P pontját vetítjük az alapháromszög csúcsaiból a szemközti oldalakra. Ezen pontok merőleges társainak harmonikus társait vesszük. Ezeket a pontokat vetítve az alapháromszög csúcsaiból, kapjuk a D-rendgörbe Q pontját.

Tétel: A Lucas-rendgörbe reciprok pontjaihoz a D-rendgörbén is reciprok pontok tartoznak.

1—8. A Lucas-rendgörbe P pontját vetítjük az alapháromszög csúcsaiból a szemközti oldalakra. A metszési pontokban az oldalakra emelt három merőleges a Darboux-rendgörbe Q pontjában metszi egymást.

Tétel: A Lucas-rendgörbe reciprok pontjaihoz a Darboux-görbén olyan két pont felel meg, melyek összekötő egyenese átmegy az $M_{0;}$ ponton.

Az Euklides-féle geometriában ez a tétel a következőkép módosul: A Lucas-rendgörbe reciprok pontjainak a Darboux-rendgörbén a körülírt kör centrumára vonatkozó szimmetrikus pontok felelnek meg.

1—VIII. A Lucas-rendgörbe P pontját az alapháromszög csúcsaiból vetítjük a szemközti oldalakra. Ezeknek a pontoknak merőleges társai a Darboux-osztálygörbe e érintőjébe esnek.

Tétel: A Lucas-rendgörbe reciprok pontjainak a Darboux-féle Γ_3 reciprok egyenesei felelnek meg.

2—8. A W-rendgörbe P pontját összekötjük az alapháromszög csúcsaival. Ez egyenesek harmonikus társaira merőlegest emelünk a csúcsokban. Ez a három egyenes a Darboux-féle rendgörbe Q pontjában metszi egymást.

Tétel: A W-rendgörbe inverz pontjainak a Darboux-rendgörbén inverz pontok felelnek meg.

2—VII. A W-rendgörbe P pontját összekötjük az alapháromszög csúcsaival, az összekötő egyenesek harmonikus társaira a csúcsokban merőlegeseket emelünk. Ezek harmonikus társait metszésbe hozzuk az oldalakkal. Ez a három pont egy egyenest határoz meg, mely a D-osztálygörbe érintője.

Tétel: A W-rendgörbe inverz pontjaihoz a D-osztálygörbe inverz érintői tartoznak.

2—VIII. A W-rendgörbe P pontját összekötjük a csúcsokkal, ez egyenesek harmonikus társain megkeressük a csúcsoknak merőleges ponttársait. Ez a három pont egy egyenesbe esik, mely a Darboux-osztálygörbe érintője.

Tétel: A W-rendgörbe inverz pontjaihoz a Darboux-osztálygörbe olyan két érintője tartozik, melyek a fix $[f_{11}f_{23}, f_{22}f_{31}, f_{33}f_{12}]$ egyenesen metszik egymást.

3—3. Az L-rendgörbe P pontját az alapháromszög csúcsaiból vetítjük a szemközti oldalakra. A metszési pontok merőleges társait, melyek ugyanazon oldalon vannak, összekötjük az alapháromszög csúcsaival, ez a három egyenes újra az L-rendgörbe egy Q pontjában metszi egymást.

Tétel: Az egymásnak reciprok P és P_r pontoknak megfelelő Q és Q_r pontok is egymás reciprokjai.

3—IV. Az L-rendgörbe P pontját az alapháromszögcsúcsaiból vetítjük a szemközti oldalakra. E pontok ugyanazon oldalra eső merőleges társainak vesszük a harmonikus társait. Ez a három pont egyenest határoz meg, mely a Σ-osztálygörbe érintője.

Tétel: Az L-rendgörbe reciprok pontjaihoz a Σ-osztálygörbe reciprok érintői tartoznak.

4—4. A Σ-rendgörbe P pontját vetítjük az alapháromszög csúcsaiból. Az így nyert egyenesek harmonikus társaira a csúcsokban merőlegeseket emelünk. Ezek harmonikus társai a Σ-rendgörbe Q pontjában metszik egymást.

Tétel: Az egymáshoz inverz P és P_i pontokhoz tartozó Q és Q_i pontok ugyancsak egymás inverzei.

4—III. A Σ-rendgörbe P pontját összekötjük az alapháromszög csúcspontjaival. Ez egyenesek harmonikus társaira a csúcsokban merőlegeseket emelünk. Ezek metszési pontjai a szemközti oldalakkal egy egyenesbe esnek, mely egyenes érinti az L-osztálygörbét.

Tétel: A Σ-rendgörbe inverz pontjainak az L-osztálygörbe inverz érintői felelnek meg.

5—5. A Δ-rendgörbe P pontját az alapháromszög csúcsaiból vetítjük a szemközti oldalakra. Ezekből a pontokból kiindulva áttérünk sorba a harmonikus társakra, ezek merőleges társaira ugyanezen az oldalon, majd az utóbbi pontok harmonikus társait vetítve a szemközti csúcsokból újra a Δ-rendgörbe Q pontjára jutunk.

Tétel: Az egymáshoz reciprok P és P_r pontok megfelelői Q és Q_r is egymás reciprok pontjai.

5—6. A Δ-rendgörbe P pontját vetítjük az alapháromszög csúcsaiból a szemközti oldalakra. Ezek harmonikus társaiban az oldalakra emelt merőlegesek a Simson—Wallace-rendgörbe Q pontjában metszik egymást.

5—VI. A Δ-rendgörbe P pontját vetítjük az alapháromszög csúcsaiból a szemközti oldalakra. E pontok harmonikus társainak merőleges társaira térünk át ugyanezen oldalon. A három pont egy egyenesbe esik, mely a Wallace-osztálygörbe érintője.

Tétel: A Δ-rendgörbe reciprok pontjaihoz a Wallace-osztálygörbe reciprok érintői tartoznak.

6—5. A Simson—Wallace-rendgörbe P pontjából merőlegeseket emelünk az alapháromszög oldalaira. A talppontok harmonikus társait összekötjük a szemközti csúcsokkal. Az így kapott három egyenes a Δ-rendgörbe Q pontjában találkozik.

6—6. A Simson—Wallace-féle C_3 görbe P pontját összekötjük az alapháromszög csúcsaival. Az összekötő egyenesekre a csúcsokban emelt merőlegesek ugyancsak a Simson—Wallace-féle rendgörbén metszik egymást.

Tétel: Az egymáshoz inverz P és P_i pontok megfelelői ugyancsak egymás inverzei lesznek.

6—V. A Simson—Wallace-féle C_3-nak P pontját összekötjük az alapháromszög csúcsaival. Az összekötő egyenesekre a csúcsokban merőlegeseket emelünk. Ezek harmonikus társai a szemközti oldalakat egy e egyenes pontjaiban metszik, amely e érintője a Δ-osztálygörbének.

Tétel: A Simson—Wallace-féle rendgörbe inverz pontjainak a Δ-osztálygörbe inverz érintői felelnek meg.

6—VI. A Simson—Wallace-féle rendgörbe P pontjából merőlegeseket emelünk az alapháromszög oldalaira. A három talppont a Wallace-osztály-görbe érintőjébe esik.

7—1. A D-rendgörbe P pontját az alapháromszög csúcsaiból vetítjük a szemközti oldalakra. A metszési pontok harmonikus társait, majd ezek merőleges társait vesszük. ugyanazon az oldalon. Ezt a három pontot összekötve az alapháromszög szemközti csúcsával, kapjuk a Lucas-rendgörbe egy pontját.

Tétel: A D-rendgörbe reciprok pontjaihoz a Lucas-rendgörbe reciprok pontjai tartoznak.

7—II. A D-rendgörbe P pontját az alapháromszög csúcsaiból vetítjük a szemközti oldalakra. A metszési pontokból áttérünk a harmonikus társaikra, utóbbiak merőleges társait vesszük s végül ezek harmonikus társait. Az így nyert három pont egy egyenesbe esik, mely érinti a W-osztálygörbét.

Tétel: A D-rendgörbe reciprok pontjaihoz a W-osztálygörbe reciprok érintői tartoznak.

8—1. A Darboux-rendgörbe P pontjaiból merőlegeseket emelünk az alapháromszög oldalaira. A talppontokat vetítve a szemközti csúcsokból a Lucas-rendgörbe pontjára jutunk.

Tétel: A Darboux-görbe P és P_i inverz pontpárjához a Lucas-rendgörbén olyan Q és Q' tartozik, hogy a $Q\,Q'$ egyenes átmegy a $H(F_{11}F_{23}+F_{12}F_{13},\ F_{22}F_{31}+F_{23}F_{21},\ F_{33}F_{12}+F_{31}F_{32})$ ponton és egyezik a PP_i egyenessel.

8—2. A Darboux-rendgörbe P pontját összekötjük az alapháromszög csúcsaival. Ezekre az egyenesekre a csúcsokban merőlegeseket emelünk. E merőlegesek harmonikus társai a W-rendgörbe pontjában metszik egymást.

Tétel: A Darboux-rendgörbe inverz pontjaihoz a W-rendgörbe inverz pontjai tartoznak.

8—I. A Darboux-rendgörbe P pontját összekötjük az alapháromszög csúcsaival. Ez egyenesek merőleges társai a szemközti oldalakat oly három pontban metszik, melyek egy egyenesbe esnek. Ez az egyenes érintője a Lucas-osztálygörbének.

Tétel: A Darboux-rendgörbe inverz pontjainak a Lucas-osztálygörbe inverz érintői felelnek meg.

8—II. A Darboux-rendgörbe P pontjából merőlegeseket emelünk az alapháromszög oldalaira. A metszési pontok harmonikus társai a W-osztálygörbe érintőjébe esnek.

I—VII. A Lucas-osztálygörbe érintőjének az alapháromszög oldalaival való metszési pontjait vetítjük a szemközti csúcsokból. Ezekre az egyenesekre a csúcsokban merőlegeseket emelünk. E merőlegesek harmonikus társai az alapháromszög oldalait egy egyenes pontjaiban metszi, amely érintője a D-osztálygörbének.

I—VIII. A Lucas-osztálygörbe érintőjének az alapháromszög oldalaival való metszési pontjait vetítjük a szemközti csúcsokból. A csúcsoknak ezeken az egyeneseken lévő merőleges társai egy egyenesbe esnek, mely érinti a Darboux-osztálygörbét.

Tétel: A Lucas-osztálygörbe inverz érintőinek oly két érintő felel meg a Darboux-osztálygörbén, amelyek a fix $[f_{11}f_{23},\ f_{22}f_{31},\ f_{33}f_{12}]$ egyenesen metszik egymást.

I—8. A Lucas-osztálygörbe érintőjének az alapháromszög oldalaival való metszési pontjait vetítjük a szemközti csúcsokból. Ezekre az egyenesekre a csúcsokban emelt merőlegesek a Darboux-rendgörbe pontjaiban metszik egymást.

Tétel: A Lucas-osztálygörbe inverz érintőinek a Darboux-rendgörbén inverz pontok felelnek meg.

II—VIII. A W-osztálygörbe e érintőjét metszésbe hozzuk az alapháromszög oldalaival. E pontok harmonikus társainak merőleges társai oly egyenest határoznak meg, mely egyenes érintője a Darboux-osztálygörbének.

II—7. A W-osztálygörbe e érintőjének az alapháromszög oldalain létesített metszési pontokból indulunk ki. Vesszük ezek harmonikus társait, az utóbbiak merőleges társait ugyanazon az oldalon. Az utóbbinak harmonikus társait vetítve az alapháromszög csúcsaiból a D-rendgörbe pontjára jutunk.

II—8. A W-osztálygörbe érintőjét metszésbe hozzuk az alapháromszög oldalaival. E pontok harmonikus társaiban az oldalakra emelt merőlegesek a Darboux-rendgörbe pontjában metszik egymást.

Tétel: A W-osztálygörbe egymáshoz reciprok érintőinek a Darboux-rendgörbén olyan két pont felel meg, melyek összekötő egyenes átmegy a fix $(F_{11}\, F_{23},\ F_{22}\, F_{31},\ F_{33}\, F_{12})$ ponton.

Az Euklides-féle geometriában a megfelelő tétel: A W-osztálygörbe reciprok érintőinek a Darboux-rendgörbén a körülírt kör középpontjára vonatkozó szimmetrikus pontok felelnek meg.

III—III. Az L-osztálygörbe e érintőjét metszésbe hozzuk az alapháromszög oldalaival. Az így nyert pontokat vetítjük a szemközti csúcsokból. A vetítő egyenesekre a csúcsokban merőlegeseket emelünk. Ezek metszési pontjai az alapháromszög oldalaival újra egyenest határoznak meg, mely az L-osztálygörbe újabb g érintője lesz.

Tétel: Az egymáshoz inverz e és e_i érintőknek megfelelő g és g_i érintők is egymás inverzei.

III—4. Az L-osztálygörbe e érintőjét metszésbe hozzuk az alapháromszög oldalaival. A metszési pontoknak a csúcsokkal való összekötő egyeneseire a csúcsokban merőlegeseket emelünk. Ez egyenesek harmonikus társai a Σ-rendgörbe P pontját határozzák meg.

IV—IV. A Σ-osztálygörbe e érintőjét metszésbe hozzuk az alapháromszög oldalaival. A metszési pontokból kiindulva vesszük a harmonikus társait, az utóbbiak merőleges társait. Végül ezek harmonikus társai a Σ-osztálygörbe újabb érintőjére esnek.

IV—3. A Σ-osztálygörbe e érintőjét metszésbe hozzuk az alapháromszög oldalaival. A metszési pontok harmonikus társait vesszük. Majd az utóbbiak merőleges társait vetítve a szemközti csúcsokból az L-rendgörbe pontjára jutunk.

Tétel: A W-osztálygörbe reciprok érintőinek az L-rendgörbe reciprok pontjai felelnek meg.

V—VI. A Δ-osztálygörbe e érintőjének az alapháromszög oldalaival való metszési pontjait vetítjük a szemközti csúcsokból. Ez egyenesek harmonikus társain megkeressük a csúcsok merőleges társait. Az így nyert három pont egy egyenesbe esik és érinti a Wallace-osztálygörbét.

V—6. A Δ-osztálygörbe e érintője metszi az alapháromszög oldalait. A metszési pontok harmonikus társait vetítjük a szemközti csúcsokból. Ez egyenesekre a csúcsokban emelt merőlegesek a Simson—Wallace-rendgörbe pontjában metszik egymást.

VI—V. A Wallace-osztálygörbe e érintőjén megkeressük az alapháromszög csúcsaihoz tartozó merőleges pontokat. E pontokat vetítjük az alapháromszög csúcsaiból. A vetítő egyenesek harmonikus társai oly három pontot adnak az alapháromszög oldalain, mely pontok a Δ-osztálygörbe érintőjén vannak.

VI—VI. A Wallace-osztálygörbe e érintőjét metszésbe hozzuk az alapháromszög oldalaival. A metszési pontok merőleges társai ugyanazon az oldalon újra a Wallace-osztálygörbe érintőjére esnek.

Tétel: A Wallace-osztálygörbe egymáshoz reciprok érintőihez ezzel az átalakítással újabb reciprok érintők tartoznak.

VI—5. A Wallace-osztálygörbe e érintőjének az oldalakkal való metszési pontjaihoz megkeressük a merőleges társait. Az utóbbiak harmonikus társait összekötve az alapháromszög csúcsaival, a Δ-rendgörbe pontjára jutunk.

Tétel: A Wallace-osztálygörbe reciprok érintőihez a Δ-rendgörbe reciprok pontjai tartoznak.

VI—6. A Wallace-osztálygörbe e érintőjén megkeressük az alapháromszög csúcsainak merőleges társait. Ezeket a pontokat vetítve az alapháromszög csúcsaiból kapjuk a Simson—Wallace-rendgörbe pontját.

VII—I. A D-osztálygörbe érintőjének az alapháromszög oldalaival való metszési pontjait vetítjük a szemközti csúcsokból. Ez egyenesek harmonikus társaira a csúcsokban merőlegeseket emelünk. Ezeknek az alapháromszög oldalaival való metszési pontjai a Lucas-osztálygörbe érintőjét határozzák meg.

Tétel: A D-osztálygörbe inverz érintőihez a Lucas-osztálygörbe inverz érintői tartoznak.

VII—2. A D-osztálygörbe e érintőjét metszésbe hozzuk az alapháromszög oldalaival. A metszési pontok harmonikus társait vetítjük az alapháromszög csúcsaiból. A vetítő egyenesekre a csúcsokban merőlegeseket emelünk s ezek harmonikus társai a W-rendgörbe pontjában metszik egymást.

Tétel: A D-osztálygörbe inverz érintőihez a W-rendgörbe inverz pontjai tartoznak.

VIII—I. A Darboux osztálygörbe e érintőjén meghatározzuk az alapháromszög csúcsaihoz tartozó merőleges társakat. Ezeket a pontokat az alapháromszög csúcsaiból vetítjük a szemközti oldalakra. Ez a három pont a Lucas-osztálygörbe érintőjébe esik.

VIII—II. A Darboux-osztálygörbe e érintőjét metszésbe hozzuk az alapháromszög oldalaival. Az egyes oldalakon megkeressük e metszési pontok merőleges társait. Ezek harmonikus társai a W-osztálygörbe érintőjébe esnek.

VIII—1. A Darboux-osztálygörbe e érintője metszi az alapháromszög oldalait. A metszési pontok merőleges társait megkeressük ugyanezen oldalakon. Ezek vetítve a szemközti csúcsokból a Lucas-rendgörbe pontját határozzák meg.

Tétel: A Darboux-osztálygörbe reciprok érintőihez a Lucas-rendgörbe reciprok pontjai tartoznak.

VIII—2. A Darboux-osztálygörbe e érintőjén megkeressük az alapháromszög csúcsainak merőleges társait. Ezeket összekötjük a szemközti csúcsokkal. A vetítő egyenesek harmonikus társai a W-rendgörbe pontjában metszik egymást.