A vector-számítás alkalmazása az infinitesimalis geometriára.

ELŐSZÓ.

Hetven éve annak, hogy *Hamilton** a quaternio-számítást és *Grassmann H.*** a pontszámítást bevezették. Azóta ezen új ága a mennyiségtannak a vector-számítássá fejlődött és tömör jeleivel, rövid levezetéseivel és egyszerű bizonyításaival csakhamar kedvelt vendége lett az elméleti természettan minden ágának és az elemi és felsőbb geometriának.

A következőkben a vectorokkal való számításnak az infinitesimalis geometriára való alkalmazását próbálom bemutatni. A munka első részében vázolom a vector-számítás elemeit, a második részben pedig annak alkalmazását a síkgörbékre, térgörbékre és felületekre.

Művem megírásánál a következő forrásmunkákat használtam:

Abraham M.: Geometrische Grundbegriffe. Enzyklopädie der mathem. Wissenschaften. IV. 14. Teubner. 1901.

Auerbach F.—Rothe R.: Taschenbuch für Mathematiker und Physiker. Teubner. III. Jahrgang. 1913.

Bottasso M.: Omografie vettoriali del piano. Rendiconti del circolo matem. di Palermo. T. 35. 1913. p. 1.

---

* A geometriai számítás alapelvét megtaláljuk már Leibniz (1679), Wessel (1797), Argand (1806) munkáiban, továbbá a Möbius-féle barycentricus (1827—1842) és a Bellavitis-féle äquipollentia-számításban (1832—1854). Hamilton a vectorok hányadosának fogalmából jut a quaternio fogalmára. Hamilton idevágó első munkája «On Quaternions, or a new System of Imaginaries in Algebra» 1843-ban jelent meg, ezt követte «Lectures on Quaternions» 1853 és «Elements of Quaternions» 1866-ban.

** A Grassmann-féle pontszámítás az 1844-ben megjelent «Ausdehnungslehre» czimű könyvben tünt fel először. Ezen munkára nagy hatással volt Möbius F. munkája: «Der baryzentrische Calcul» 1827. A vector-számítás ujabb fejlődése különösen Gibbs és Burali-Forti nevéhez fűződik.

Bucherer A. H.: Elemente der Vektoranalysis. Mit Beispielen aus der theoretischen Physik. Teubner. 2. Aufl. 1905.

Burali-Forti C.: Introduction a la géométrie différentielle suivant la méthode de H. Grassmann. Paris. Gauthier. 1897.

Burali-Forti C.—Marcolongo R.—Lattès S.: Éléments de calcul vectoriel avec de nombreuses applications a la géométrie, a la mécanique et a la physique mathématique. Paris. Hermann. 1910.

Burali-Forti C.—Marcolongo R.—Baridon P.: Transformations linéaires. Analyse vectorielle générale I. Pavie. Mattei. 1912.

Ferenczi J.: Előiskola a Hamilton-féle quaterniók elméletéhez. Nyitra. 1887.

Gans R.: Einführung in die Vektoranalysis mit Anwendungen auf die mathematische Physik. Teubner. 1905. 2 Aufl. 1909.

Gibbs and Wilson: Vector-Analysis. A text-book for the use of students of mathematics and physics. New-York. Ch. Scribner's Sons. 1902. 2. Ed. 1910.

Grassmann H.: Die Ausdehnungslehre von 1844 oder die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik. Leipzig. 2 Aufl. 1878.

Grassmann H.: Anwendungen der Ausdehnungslehre auf die allgemeine Theorie der Raumkurven und krummen Flächen. I. Teil: Raumkurven. Halle, 1886. II. Teil: Krumme Flächen. Erste Hälfte. Halle, 1888. Zweite Hälfte. Halle 1893.

Graefe F.: Vorlesungen über die Theorie der Quaternionen mit Anwendung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung. Teubner. 1883.

Hamilton W. R.—Glan P.: Elemente der Quaternionen. Leipzig. Barth. I. B. 1882. II. B. 1884.

Horváth J.: A quaternio elmélet elemei. Mathematikai és Physikai Lapok. V. 1896. p. 93.

Jahnke E.: Vorlesungen über die Vektorenrechnung. Mit Anwendungen auf Geometrie, Mechanik und mathematische Physik. Teubner. 1905.

Ignatowsky W. v.: Die Vektoranalysis und ihre Anwendung in der theoretischen Physik. Teubner. I. Teil 1909. II. Teil 1910.

Möbius A. F.: Der barycentrische Calcul ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie dargestellt und insbesondere auf die Bildung neuer Classen von Aufgaben und die Entwickelung mehrerer Eigenschaften der Kegelschnitte angewendet. Leipzig. Barth. 1827.

Peano G.: Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale. Torino. 1887.

Peano G.: Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann. Torino. Bocca. 1888.

Rothe R.: Anwendungen der Vektoranalysis auf Differentialgeometrie. Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung. 21. B. 1912. p. 249.

Rothe R.: Über die Inversion einer Fläche und die konforme Abbildung zweier Flächen aufeinander mit Erhaltung der Krümmungslinien. Mathematische Annalen. 72. B. 1912. p. 57.

Schlegel V.: System der Raumlehre. Nach den Prinzipien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre und als Einleitung in dieselbe. Teubner. I. T. Geometrie. 1872. II. T. Die Elemente der modernen Geometrie und Algebra. 1875.

Tait P. G.—Scherff G.: Elementares Handbuch der Quaternionen. Teubner. 1880.

Timerding H. E.: Geometrische Grundlegung der Mechanik eines starren Körpers. Enzyklopädie der math. Wissenschaften IV. 2. Teubner. 1902.

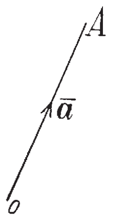
Valentiner S.: Vektoranalysis. Sammlung Göschen. 1907. 2. Aufl. 1912.

I. RÉSZ.

A vectorokon végezhető műveletek.

1. Alapfogalmak.

A térnek két tetszésszerinti O és A pontja között lévő véges távolságot kétféleképp járhatjuk be; vagy az O-ból kiindulva haladunk az A-ba, vagy ellenkező irányban az A-ból jutunk az O-ba. Ha a távolság nagysága mellett az irányt is jelezzük, melyben haladnunk kell, *vector*-mennyiséget kapunk. Az olyan mennyiséget ellenben, melynek iránya nincs, csak nagysága, *scalaris* mennyiségnek nevezzük. A vector nagyságát kifejezi a távolság hosszúsága. Irányát a *rajzban* a távolságra alkalmazott nyillal szokás jelezni; *írásban* pedig egymás mellé írjuk azon O pontot, melyből a vector kiindul és az A-t, mely felé halad és fölöttük kis vonalkát húzunk; a rajzolt vector jele tehát $\overline{OA}$. Az O pontot a vector *kezdőpontjának,* az A pontot *végpontjának* mondjuk. A vectort jelöljük még vonáskával ellátott kis latin betűvel is, pl. $\overline{OA}$ vectort jelölhetjük $\bar{a}$-val. Ha az OA távolságot ellenkező irányban teszszük meg, kapjuk az *ellenkező irányú* $\overline{AO}$ vectort, melyet még $-\bar{a}$, vagy $-\overline{OA}$ symbolummal is jelzünk. Ha valamely vector kezdőpontja és végpontja egybeesik, akkor *nullavectornak* mondjuk és 0-al jelöljük.



1. ábra.

A vectort teljesen meghatározhatjuk, ha megadjuk a kezdőpontját, irányát és nagyságát és ez esetben a vectort *radiusvectornak* mondjuk. Ha ellenben a vectornak iránya és nagysága van adva, kezdőpontja azonban határozatlan, akkor *szabad* vectornak nevezzük. A szabad vectorokat tehát a térben önmagukkal párhuzamosan eltolhatjuk, vagy mondhatjuk, hogy két oly szabad vector, mely irányban és nagyságban megegyezik, de kezdőpontjuk nem esik egybe, egyenlő. Az oly vectort, mely a tér egy egyenesén mozoghat csak, *kötött-vectornak* nevezzük. A vector nagyságát *absolut* *értékének* is mondjuk és rendesen ugyanazon betűvel jelezzük, mint a vectort, csak vonás nélkül. Igy az $\bar{a}$ absolut értéke $|\bar{a}| = a$. Az oly vectort, melynek absolut értéke 1, *egységvectornak* mondjuk és ez jelenti a vectornak elvont irányát. Bármely vectort úgy foghatunk fel, mint absolut értékének és az egységnyi vectornak szorzatát. Ha $\bar{a}$ absolut értéke a és az irányát jelző egységnyi vector $\bar{\varepsilon}$, akkor

$$\bar{a} = a\ \bar{\varepsilon}.$$

A vector jelölését az eddigitől kissé eltérőleg más alakban is megállapíthatjuk. Ha ugyanis az O pontból kiindulva az $\bar{a}$ vectorral egyenlő irányú és nagyságú uton haladva az A pontba jutunk, mintegy magától adódik az

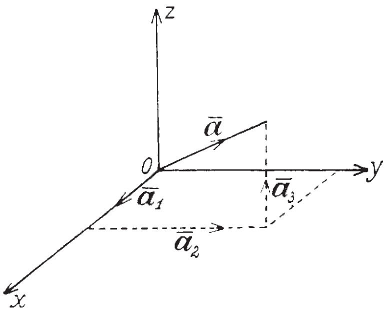
$$O + \bar{a} = A$$

egyenlőség értelme, mely szerint az adott O pontnak és $\bar{a}$ vectornak összege jelenti az $\bar{a}$ végpontját, ha az adott O a kezdőpont. Ezen egyenlőséget a mennyiségtan közönséges szabályai szerint kezelve

$$\bar{a} = A - O$$

egyenlőségre jutunk, mely mutatja, hogy a vectort a végpontjának és kezdőpontjának különbségével is definiálhatjuk.

A következőkben a vectorokat egy jobbsodrású derékszögű coordinátarendszerre fogjuk vonatkoztatni. Mivel a szabad vector önmagával párhuzamosan eltolható, vigyük az $\bar{a}$ kezdőpontját az origoba. Az origoból kiinduló $\bar{a}$ vectort meghatározza az absolut értéke a és iránya, melyet a tengelyekre vonatkozó három iránycosinusával ξ_1, ξ_2 ξ_3-al adhatunk meg, melyek között az $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$ összefüggés áll fenn.



2. ábra.

A vectort meghatározhatjuk még a három tengelyre vonatkoztatott vetületével is. Pl. ha az $\bar{a}$ vector vetületei a tengelyekre $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, akkor ezek egyértelmüleg meghatározzák az $\bar{a}$ vectort. Ha a tengelyeket jelző egységnyi vectorokat $\bar{\varepsilon}_1$, $\bar{\varepsilon}_2$. $\bar{\varepsilon}_3$ betükkel jelöljük, akkor

$$\bar{a}_1 = a_1\ \bar{\varepsilon}_1,\quad \bar{a}_2 = a_2\ \bar{\varepsilon}_2,\quad \bar{a}_3 = a_3\ \bar{\varepsilon}_3$$

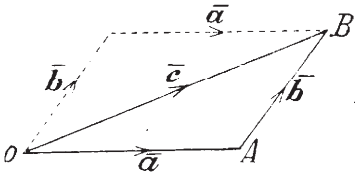
$$\text{vagy}\quad \bar{a}_1 = a\xi_1\,\bar{\varepsilon}_1,\quad \bar{a}_2 = a\xi_2\,\bar{\varepsilon}_2,\quad \bar{a}_3 = a\xi_3\,\bar{\varepsilon}_3.$$

2. Vectorok összeadása és kivonása.

Ha az $\bar{a}$ vector végpontjából kiindulva a $\bar{b}$ vectort irány és nagyság szerint lemérjük és az $\bar{a}$ kezdőpontjából a $\bar{b}$ végpontjáig egyenes irányban haladva a $\bar{c}$ vectort nyerjük, akkor a $\bar{c}$-t az $\bar{a}$ és $\bar{b}$ összegének mondjuk és

$$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$$

egyenlőséggel jelöljük. Még világosabb az összeadás fogalma, ha a vectorokat pontok különbségével fejezzük ki. Ha ugyanis



3. ábra.

$$\bar{a} = A - O,$$
$$\bar{b} = B - A$$
$$\text{és } \bar{c} = B - O,$$

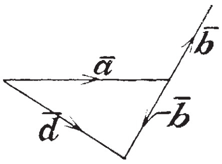
akkor előbbi egyenlőségünk alakja lesz

$$B - O = (A - O) + (B - A).$$

A $\bar{b}$ kivonásán értjük a $\bar{b}$-vel ellenkező irányú $- \bar{b}$ hozzáadását

$$\bar{d} = \bar{a} - \bar{b}.$$

Több vector összeadása úgy történik, hogy először összeadunk két vectort, azután az összeghez hozzáadjuk a harmadikat és így tovább, végül az első kezdőpontját és az utolsó végpontját összekötjük egyenessel és az így keletkezett vector az adott vectorok összege. Ezek alapján a derékszögű coordinátarendszer esetében írható



4. ábra.

$$\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3 = a_1\,\bar{\varepsilon}_1 + a_2\,\bar{\varepsilon}_2 + a_3\,\bar{\varepsilon}_3,$$

vagyis minden vector az összetevőinek összegével egyenlő.

Az összeadás *commutativ* művelet, vagyis

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a},$$

aminek helyességéről a 3. ábra alapján könnyű meggyőződni. Továbbá *associativ* művelet, vagyis

$$\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}),$$

amiről szintén könnyű megbizonyosodni.

Az összeadás fogalmából következik, ha az $\bar{a}$ vectort m-szer vesszük összeadandóul, hol m positiv egész szám, akkor oly b

vectort kapunk, melynek iránya megegyezik $\bar{a}$ irányával, de nagysága m-szer akkora, ezen vectort

$$\bar{b} = m\,\bar{a}\text{-}$$

val jelölhetjük. Ha m pozitiv tört, a $\bar{b}$ szintén jelentsen az $\bar{a}$-val egyirányú vectort, melynek absolut értéke $m\,a$. Ha m negativ szám, ezenfelül még az $\bar{a}$ irányát is ellenkezőre kell változtatni, hogy $\bar{b} = m\,\bar{a}$-t kapjuk.

Ha az $\bar{a}$ egységnyi vector, akkor

$$|\bar{b}| = m$$

és föntebbi egyenlőségünk szerint minden vector az irányát jelző egységnyi vectornak és absolut értékének szorzatával egyenlő.

3. Vector-egyenletek.

A vectorok összeadása és a vectornak scalarissal való szorzása már bőséges anyagot nyujt az alkalmazásra.*

Ha adva az O pont és egy $\bar{a}$ vector, akkor változó x mellett

$$P = O + x\,\bar{a} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (1)$$

egyenlet jelenti mindazon pontokat, melyek az O-ból kiinduló és az $\bar{a}$ vectorral párhuzamos egyenesen feküsznek. Az (1)-et azért az *egyenes egyenletének* is nevezzük. Hasonló meggondolással a

$$P = O + \bar{b} + x\,\bar{a} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (2)$$

olyan az $\bar{a}$-val párhuzamos egyenes egyenlete, mely a $\bar{b}$ végpontján halad át. Az (1) és (2) helyett írhatjuk még

$$\bar{r} = x\,\bar{a} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (1)$$

$$\text{és } \bar{r} = \bar{b} + x\,\bar{a} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (2)$$

ha $P - O = \bar{r}$.

Az

$$\bar{r} = x\,\bar{a} + y\,\bar{b} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (3)$$

egyenlettel adott vector pedig képviseli mindazon pontokat, melyek az $\bar{a}$ és $\bar{b}$ meghatározta síkban feküsznek, a (3) tehát ezen *sík egyenlete.* Az

$$\bar{r} = \bar{c} + x\,\bar{a} + y\,\bar{b}$$

pedig a $\bar{c}$ vector végpontján átmenő és az $\bar{a}$ és $\bar{b}$ vectorokkal párhuzamos síknak egyenlete. Végül az

$$\bar{r} = x\,\bar{a} + y\,\bar{b} + z\,\bar{c}$$

---

* Tait-Scherff: Elementares Handbuch der Quaternionen. Teubner. 1880. p. 10. Graefe Fr.: Vorlesungen über die Theorie der Quaternionen. Teubner. 1883. p. 15.

vector, ha $\bar{a}$, $\bar{b}$ és $\bar{c}$ nem párhuzamosak egy és ugyanazon síkkal, jelentheti a tér minden pontját.

Az előzők alapján felírhatjuk az $\bar{a}$ és $\bar{b}$ radiusvectorok végpontján átmenő egyenes egyenletét, mely a következő lesz:

$$\bar{r} = \bar{a} + x(\bar{b} - \bar{a}),$$

vagy

$$\bar{r} + (x - 1)\,\bar{a} - x\,\bar{b} = 0,$$

ebből általánosan

$$x\,\bar{r} + y\,\bar{a} + z\,\bar{b} = 0$$

esetében, ha $x + y + z = 0$ indenticusan eltűnik, a három $\bar{r}$, $\bar{a}$, $\bar{b}$ vector végpontja egy egyenesben fekszik.

Hasonló módon az $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ radiusvectorok végpontjával meghatározott sík egyenlete

$$\bar{r} = \bar{a} + x(\bar{b} - \bar{a}) + y\ (\bar{c} - \bar{a}),$$

vagy

$$\bar{r} + (x + y - 1)\,\bar{a} - x\,\bar{b} - y\,\bar{c} = 0$$

és ebből kapjuk, ha az

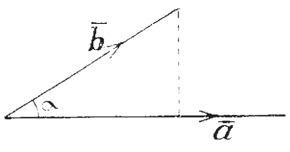
$$x\bar{r} + y\,\bar{a} + z\,\bar{b} + u\,\bar{c} = 0$$

és $x + y + z + u = 0$ identicusan eltűnik, az egyenlet négy vectorának végpontja egy síkban fekszik.

4. Vectorok scalaris szorzása.

Az $\bar{a}$ és $\bar{b}$ vector scalaris szorzatán értjük a két vector absolut értékének és a közöttük lévő $(\bar{a}\,\bar{b})$ szög cosinusának szorzatát. A scalaris szorzatot $(\bar{a}\ \bar{b})$-vel, vagy egyszerűbben $\bar{a}\,\bar{b}$-vel jelöljük, tehát

$$\bar{a}\bar{b} = ab\ cos\ (\bar{a}\,\bar{b}) = ab\ \cos\ \alpha.$$



5. ábra.

A vectorok scalaris szorzata tehát scalaris mennyiség. Ha ezen szorzatot

$$\bar{a}\bar{b} = a\ (b\ cos\ \alpha) = b\ (a\ \cos\ \alpha)$$

alakjában nézzük, mondhatjuk, hogy az $\bar{a}$ és $\bar{b}$ vectorok scalaris szorzatát megkapjuk, ha egyiket, pl. $\bar{a}$-t vetítjük a másikra, $\bar{b}$-re és ezen vetület absolut értékét megszorozzuk a másiknak, $\bar{b}$-nek absolut értékével. A meghatározásból kitűnik, hogy

$$\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a},$$

vagyis a vectorok scalaris szorzása commutativ művelet.

A szorzat meghatározásából következik, hogy

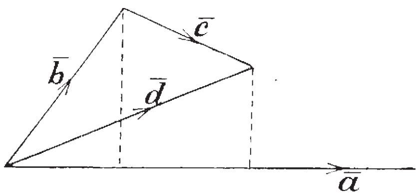
$$m\ (\bar{a}\bar{b}) = (m\bar{a},\ \bar{b}) = (\bar{a},\ m\bar{b}),$$

ha m scalaris mennyiség, vagyis scalaris szorzatot scalaris mennyiséggel úgy szorozhatunk, hogy egyik tényezőjét szorozzuk, a másikat változatlanul hagyjuk.

Ha a két vector egymásra merőleges, vagy legalább az egyik nullavector, akkor scalaris szorzatuk eltűnik és fordítva, ha két vector scalaris szorzata eltűnik, akkor vagy merőleges egymásra a két vector, vagy legalább az egyik nullavector. Ha a vectort önmagával szorozzuk meg, mivel a bezárt szög 0, kapjuk

$$(\bar a\ \bar a) = \bar a^2 = a^2,$$

vagyis a *vector scalaris négyzete egyenlő absolut értékének négyzetével.*



6. ábra.

Ha az $\bar a$ vectort a $\bar b + \bar c = \bar d$ összeggel szorozzuk scalarisan, mivel $\bar d$-nek az $\bar a$-ra való vetülete egyenlő a $\bar b$ és $\bar c$ vetületeinek összegével, azért

$$(\bar a, \ \bar b + \bar c) = (\bar a\bar b) + (\bar a\bar c),$$

tehát a scalaris szorzatra áll a szorzás associativ törvénye, vagyis itt érvényes a többtagú algebrai kifejezések szorzásának szabálya.

Az előző egyenlőségből könnyen lehozható az $(\bar a, \ \bar b - \bar c) = (\bar a\bar b) - (\bar a\bar c)$ egyenlőség.

A derékszögű coordinátarendszernél ezek alapján állanak a következő egyenlőségek:

$$\bar\varepsilon_1{}^2 = 1, \ \bar\varepsilon_2{}^2 = 1, \ \bar\varepsilon_3{}^2 = 1$$

$$\text{és} \ \bar\varepsilon_1\,\bar\varepsilon_2 = 0, \ \bar\varepsilon_1\,\bar\varepsilon_3 = 0, \ \bar\varepsilon_2\,\bar\varepsilon_3 = 0.$$

Ezen egyenlőségeket szem előtt tartva kapjuk a componensekre bontott vectorok esetében

$$\bar a\ \bar b = (a_1\,\bar\varepsilon_1 + a_2\,\bar\varepsilon_2 + a_3\,\bar\varepsilon_3, \ b_1\,\bar\varepsilon_1 + b_2\,\bar\varepsilon_2 + b_3\,\bar\varepsilon_3) = a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + a_3\,b_3$$

$$\text{és így} \ \bar a^2 = a^2 = a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2,$$

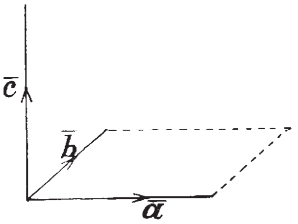
vagyis az $\bar a = a_1\,\bar\varepsilon_1 + a_2\,\bar\varepsilon_2 + a_3\,\bar\varepsilon_3$ absolut értéke

$$|\bar a| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}.$$

5. Vectorszorzat.

Két $\bar a$ és $\bar b$ vectornak vectorszorzatán értjük azon $\bar c$ vectort, melynek absolut értéke $ab \sin(\bar a\bar b)$ és iránya az $\bar a$, $\bar b$ vectorok síkjára merőleges és $(\bar a, \ \bar b, \ \bar c)$ jobbsodrású rendszernek felel meg. Ha ezen vectorszorzatot $[\bar a\bar b]$-vel jelöljük, akkor

$$\bar c = [\bar a\bar b] = \bar\varepsilon \ ab \ sin \ (\bar a\bar b),$$



7. ábra.

hol $\bar{\varepsilon}$ a $\bar{c}$ vector egységnyi vectora. A $\bar{c}$ vector absolut értéke pedig $ab \sin(\bar{a}\bar{b})$, a mi az $\bar{a}$ és $\bar{b}$ vectorból alakított parallelogrammának területe.

A meghatározás szerint, mivel $\sin(\bar{b}\bar{a}) = -\sin(\bar{a}\bar{b})$,

$$[\bar{b}\,\bar{a}] = -[\bar{a}\,\bar{b}],$$

tehát vectorszorzásnál nem érvényes a commutativ törvény. Ellenben a vectorszorzatoknál is igaz a scalaris mennyiséggel való szorzásnak azon szabálya, mit az előző pontban kimondtunk, vagyis

$$m\,[\bar{a}\,\bar{b}] = [m\,\bar{a},\ \bar{b}] = [\bar{a},\ m\,\bar{b}],$$

ha m scalaris. Ha a két vector egyirányú vagy egyik nullavector, akkor $[\bar{a}\,\bar{b}] = 0$ és viszont, ha két vector vectorszorzata eltűnik, akkor a két vector vagy párhuzamos, vagy legalább az egyik nullavector. Ha az $\bar{a}$ vectort önmagával szorozzuk, mivel a közbeeső szög 0, tehát

$$[\bar{a}\,\bar{a}] = 0.$$

Hasonlókép a jobbsodrású derékszögű coordinátarendszerünkben állanak ezen egyenlőségek:

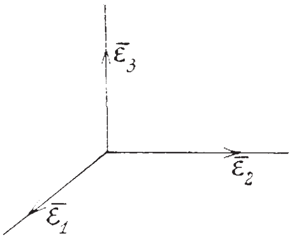
$$[\bar{\varepsilon}_1\,\bar{\varepsilon}_1] = 0,\quad [\bar{\varepsilon}_2\,\bar{\varepsilon}_2] = 0,\quad [\bar{\varepsilon}_3\,\bar{\varepsilon}_3] = 0,$$

továbbá

$$[\bar{\varepsilon}_1\,\bar{\varepsilon}_2] = \bar{\varepsilon}_3,\quad [\bar{\varepsilon}_2\,\bar{\varepsilon}_3] = \bar{\varepsilon}_1,\quad [\bar{\varepsilon}_3\,\bar{\varepsilon}_1] = \bar{\varepsilon}_2,$$

$$[\bar{\varepsilon}_2\,\bar{\varepsilon}_1] = -\bar{\varepsilon}_3,\quad [\bar{\varepsilon}_3\,\bar{\varepsilon}_2] = -\bar{\varepsilon}_1,$$

$$[\bar{\varepsilon}_1\,\bar{\varepsilon}_3] = -\bar{\varepsilon}_2.$$



8. ábra.

A szorzás associativ törvénye itt is áll.

Ha ugyanis $\bar{b} + \bar{c} = \bar{d}$, akkor, mint az ábrából látható,

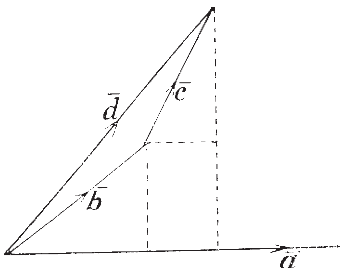
$$d \sin(\bar{a}\,\bar{d}) =$$
$$= b \sin(\bar{a}\,\bar{b}) + c \sin(\bar{a}\,\bar{c})$$

és $ad \sin(\bar{a}\,\bar{d}) =$

$$= ab \sin(\bar{a}\,\bar{b}) + ac \sin(\bar{a}\,\bar{c})$$

és így egyúttal

$$[\bar{a},\ \bar{b} + \bar{c}] = [\bar{a}\,\bar{b}] + [\bar{a}\,\bar{c}].$$



9. ábra.

Látjuk tehát, hogy itt is áll a többtagúak szorzásának szabálya.

A componenseire bontott vectorok esetében ez alapon kapjuk

$$[\bar{a}\,\bar{b}] = [a_1\,\bar{\varepsilon}_1 + a_2\,\bar{\varepsilon}_2 + a_3\,\bar{\varepsilon}_3,\ b_1\,\bar{\varepsilon}_1 + b_2\,\bar{\varepsilon}_2 + b_3\,\bar{\varepsilon}_3] =$$
$$= (a_2\,b_3 - a_3\,b_2)\,\bar{\varepsilon}_1 + (a_3\,b_1 - a_1\,b_3)\,\bar{\varepsilon}_2 + (a_1\,b_2 - a_2\,b_1)\,\bar{\varepsilon}_3 =$$
$$= \begin{vmatrix} \bar{\varepsilon}_1 & \bar{\varepsilon}_2 & \bar{\varepsilon}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

6. Nevezetesebb szorzatalakok.

Az előző két pont alapján bebizonyítunk néhány fontos szorzatalakot, melyre a későbbiekben többször fogunk hivatkozni.

1. Vizsgáljuk először az $\bar{a}\,[\bar{b}\,\bar{c}]$ szorzatot. Az egy pontból kiinduló $\bar{a}$, $\bar{b}$ és $\bar{c}$ vector egy parallelepipedont határoz meg, melynek élei az $\bar{a}$, $\bar{b}$ és $\bar{c}$ vectorok. Ezen parallelepipedon egyik oldalának területét $[\bar{b}\,\bar{c}]$ absolut értéke adja, a parallelepipedon ezen oldalhoz tartozó magasságát pedig az $\bar{a}$-nak $[\bar{b}\,\bar{c}]$-re való vetülete, mert $[\bar{b}\,\bar{c}]$ merőleges a felvett oldallapra. Az $\bar{a}\,[\bar{b}\,\bar{c}]$ szorzat tehát az adott parallelepipedon köbtartalmát szolgáltatja. A három vectort kifejezve derékszögű componensekkel

$$\bar{a}\,[\bar{b}\,\bar{c}] = \bar{a}\,\{(b_2\,c_3 - b_3\,c_2)\,\bar{\varepsilon}_1 + (b_3\,c_1 - b_1\,c_3)\,\bar{\varepsilon}_2 + (b_1\,c_2 - b_2\,c_1)\,\bar{\varepsilon}_3\} =$$
$$= a_1\,(b_2\,c_3 - b_3\,c_2) + a_2\,(b_3\,c_1 - b_1\,c_3) + a_3\,(b_1\,c_2 - b_2\,c_1) =$$
$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \bar{b}\,[\bar{c}\,\bar{a}] = \bar{c}\,[\bar{a}\,\bar{b}]. \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I.)}$$

Ezen fontos formulát a következőkben *térfogat-szabály*nak fogjuk nevezni.

Levezetésünkből következik az

$$\bar{a}\,[\bar{a}\,\bar{b}] = \bar{a}\,[\bar{b}\,\bar{a}] = \bar{b}\,[\bar{a}\,\bar{a}] = 0$$

egyenlőség. Ennek felhasználásával, ha $\bar{a} = B\,\bar{b} + C\,\bar{c}$, vagyis párhuzamos a $\bar{b}$ és $\bar{c}$ meghatározta síkkal, akkor

$$\bar{a}\,[\bar{b}\,\bar{c}] = B\,\bar{b}\,[\bar{b}\,\bar{c}] + C\,\bar{c}\,[\bar{b}\,\bar{c}] = 0,$$

tehát az $\bar{a}\,[\bar{b}\,\bar{c}]$ szorzat eltűnik, ha a három adott vector ugyanazon síkkal párhuzamos.

2. Az $\big[\bar{a}\,[\bar{b}\,\bar{c}]\big]$ vector esetében legyen $[\bar{b}\,\bar{c}] = \bar{d}$, vagy részletesen

$$d_1 = b_2\,c_3 - b_3\,c_2,\quad d_2 = b_3\,c_1 - b_1\,c_3,\quad d_3 = b_1\,c_2 - b_2\,c_1.$$

Az $\big[\bar{a}\,[\bar{b}\,\bar{c}]\big] = [\bar{a}\,\bar{d}]$ vector x-componense tehát

$$(a_2\, d_3 - a_3\, d_2)\, \bar{\varepsilon}_1 = (a_2\, c_2 + a_3\, c_3)\, b_1\, \bar{\varepsilon}_1 - (a_2\, b_2 + a_3\, b_3)\, c_1\, \bar{\varepsilon}_1 =$$
$$= (a_1\, c_1 + a_2\, c_2 + a_3\, c_3)\, b_1\, \bar{\varepsilon}_1 - (a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + a_3\, b_3)\, c_1\, \bar{\varepsilon}_1,$$

vagy másképp

$$(a_2\, d_3 - a_3\, d_2)\, \bar{\varepsilon}_1 = (\bar{a}\,\bar{c})\, b_1\, \bar{\varepsilon}_1 - (\bar{a}\,\bar{b})\, c_1\, \bar{\varepsilon}_1,$$

hasonlóképen

$$(a_3\, d_1 - a_1\, d_3)\, \bar{\varepsilon}_2 = (\bar{a}\,\bar{c})\, b_2\, \bar{\varepsilon}_2 - (\bar{a}\,\bar{b})\, c_2\, \bar{\varepsilon}_2,$$
$$(a_1\, d_2 - a_2\, d_1)\, \bar{\varepsilon}_3 = (\bar{a}\,\bar{c})\, b_3\, \bar{\varepsilon}_3 - (\bar{a}\,\bar{b})\, c_3\, \bar{\varepsilon}_3.$$

E három képlet összefoglalásából adódik

$$\Big[\bar{a}\,[\bar{b}\,\bar{c}]\Big] = (\bar{a}\,\bar{c})\,\bar{b} - (\bar{a}\,\bar{b})\,\bar{c}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(II.)}$$

melyet Heun után* a vectorok *szétbontási szabályá*nak vagy formulájának nevezünk.

Ezen képletből könnyen kihozható az

$$\Big[\bar{a}\,[\bar{a}\,\bar{b}]\Big] = -\Big[\bar{a}\,[\bar{b}\,\bar{a}]\Big] = (\bar{a}\,\bar{b})\,\bar{a} - (\bar{a}\,\bar{a})\,\bar{b}$$

egyenlőség, továbbá ezen összefüggés

$$\Big[\bar{a}\,[\bar{b}\,\bar{c}]\Big] + \Big[\bar{b}\,[\bar{c}\,\bar{a}]\Big] + \Big[\bar{c}\,[\bar{a}\,\bar{b}]\Big] = 0.$$

3. A térfogat-szabály és szétbontási szabály segítségével könnyű kiszámítani az $[\bar{a}\,\bar{b}]\,[\bar{c}\,\bar{d}]$ szorzatot. Ha ugyanis $[\bar{a}\,\bar{b}] = \bar{e}$, akkor a térfogat-szabály szerint

$$\bar{e}\,[\bar{c}\,\bar{d}] = \bar{c}\,[\bar{d}\,\bar{e}] = \bar{c}\Big[\bar{d}\,[\bar{a}\,\bar{b}]\Big].$$

Alkalmazva a szétbontási szabályt

$$\Big[\bar{d}\,[\bar{a}\,\bar{b}]\Big] = (\bar{d}\,\bar{b})\,\bar{a} - (\bar{d}\,\bar{a})\,\bar{b}$$

egyenlőségre jutunk. Ezt helyettesítve kapjuk

$$[\bar{a}\,\bar{b}]\,[\bar{c}\,\bar{d}] = (\bar{a}\bar{c})\,(\bar{b}\,\bar{d}) - (\bar{a}\,\bar{d})\,(\bar{b}\,\bar{c}). \quad \ldots\ldots \quad \text{(III.)}$$

Ezen azonosságból nagyon egyszerűen következik az

$$[\bar{a}\,\bar{b}]^2 = \bar{a}^2\,\bar{b}^2 - (\bar{a}\,\bar{b})^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(IV.)}$$

egyenlőség.

Ha az

$$[\bar{a}\,\bar{c}]\,[\bar{b}\,\bar{d}] = (\bar{a}\,\bar{b})\,(\bar{c}\,\bar{d}) - (\bar{a}\,\bar{d})\,(\bar{b}\,\bar{c})$$

egyenlőségből kivonjuk az

$$[\bar{a}\,\bar{d}]\,[\bar{b}\,\bar{c}] = (\bar{a}\,\bar{b})\,(\bar{c}\,\bar{d}) - (\bar{a}\bar{c})\,(\bar{b}\,\bar{d})$$

egyenlőséget, az

$$[\bar{a}\bar{c}]\,[\bar{b}\,\bar{d}] - [\bar{a}\bar{d}]\,[\bar{b}\,\bar{c}] = (\bar{a}\,\bar{c})\,(\bar{b}\,\bar{d}) - (\bar{a}\bar{d})\,(b\,\bar{c}) = [\bar{a}\,\bar{b}]\,[\bar{c}\,\bar{d}] \quad \text{(V.)}$$

azonosságra jutunk.

---

* K. Heun: Lehrbuch der Mechanik. I. Teil. Kinematik. Leipzig, 1906. p. 21—22.

4. Az $\big[[\bar{a}\,\bar{b}]\ [\bar{c}\,\bar{d}]\big]$ vectorszorzatot a szétbontási szabály segítségével számíthatjuk ki. Legyen e czélból $[\bar{a}\,\bar{b}] = \bar{e}$, a keresett szorzat tehát

$$\big[\bar{e}\ [\bar{c}\,\bar{d}]\big] = (\bar{e}\,\bar{d})\ \bar{c} - (\bar{e}\,\bar{c})\ \bar{d},$$

vagy helyettesítve

$$\big[[\bar{a}\,\bar{b}]\ [\bar{c}\,\bar{d}]\big] = \big([\bar{a}\,\bar{b}]\ \bar{d}\big)\ \bar{c} - \big([\bar{a}\,\bar{b}]\ \bar{c}\big)\ \bar{d}. \quad \text{(VI.)}$$

Ebből ismét könnyen következik az

$$\big[[\bar{a}\,\bar{b}]\ [\bar{a}\,\bar{c}]\big] = -\big[[\bar{a}\,\bar{b}]\ [\bar{c}\,\bar{a}]\big] = \big(\bar{a}\ [\bar{b}\,\bar{c}]\big)\ \bar{a}$$

és

$$\big[[\bar{a}\,\bar{b}]\ [\bar{b}\,\bar{c}]\big] = -\big[[\bar{a}\,\bar{b}]\ [\bar{c}\,\bar{b}]\big] = -\big(\bar{a}\ [\bar{b}\,\bar{c}]\big)\ \bar{b}$$

egyenlőség.

5. Végül a szétbontási szabályból közvetlenül folyik az

$$\bar{a}\ \big[\bar{b}\ [\bar{c}\,\bar{d}]\big] = (\bar{a}\bar{c})\ (\bar{b}\,\bar{d}) - (\bar{b}\,\bar{c})\ (\bar{a}\,\bar{d}) = [\bar{a}\,\bar{b}]\ [\bar{c}\,\bar{d}] \quad \text{(VII.)}$$

identitás.

7. Vectorok differentiálása scalaris szerint.

Ha az $\bar{a}$ vector egy vagy több $(u, v\ldots)$ scalaris mennyiség változásától függ, akkor azt mondjuk, hogy az $\bar{a}$ függvénye ezen $(u, v\ldots)$ változóknak. Egyszerűség kedvéért vegyük fel, hogy az $\bar{a}$ függvénye a scalaris u-nak. Ez esetben, ha az u változik $\triangle u$-val, az $\bar{a}$ is változik a $\triangle \bar{a}$ vectorral és ezen változás

$$\triangle \bar{a} = \bar{a}\ (u + \triangle u) - \bar{a}\ (u)\,;$$

ha osztjuk ezen kifejezést a független változó változásával, a

$$\frac{\triangle \bar{a}}{\triangle u} = \frac{\bar{a}\ (u + \triangle u) - \bar{a}\ (u)}{\triangle u}$$

különbségi hányadost kapjuk. Ha ezen kifejezésnek $\lim \triangle u = 0$ esetében van határértéke, akkor azt mondjuk, hogy az $\bar{a}\ (u)$ *vector az u szerint differentiálható* és a limest az $\bar{a}\ (u)$ vector u szerint vett differentiálhányadosának nevezzük és $\frac{d\,\bar{a}}{du}$ vagy $\bar{a}'$ jellel írjuk. Ha ezen vector újból differentiálható, kapjuk $\bar{a}''(u)$, $\bar{a}'''(u)\ldots\ \bar{a}^{(n)}(u)$ gasabbrendű differentiálhányadosokat.

Ha két vectornak scalaris vagy vectorszorzatában az egyik vagy mindkét tényező az u változónak függvénye, akkor ezen változó szerint differentiálhatjuk a szorzatot. Legyen például az

$(\bar{a}\ \bar{b})$ szorzatban az $\bar{a}$ és $\bar{b}$ az u-nak függvénye, akkor a közönséges szabályok szerint eljárva a szorzat különbségi hányadosa

$$\frac{(\bar{a}+\triangle\,\bar{a}, \bar{b}+\triangle\,\bar{b})-(\bar{a}\ \bar{b})}{\triangle\, u}=\frac{(\bar{a}+\triangle\,\bar{a}, \bar{b}+\triangle\,\bar{b})-(\bar{a}, \bar{b}+\triangle\,\bar{b})}{\triangle\, u}+$$
$$+\frac{(\bar{a},\ \bar{b}+\triangle\,\bar{b})-(\bar{a}\ \bar{b})}{\triangle\, u}=\left(\frac{\triangle\,\bar{a}}{\triangle\, u},\ \bar{b}+\triangle\,\bar{b}\right)+\left(\bar{a},\ \frac{\triangle\,\bar{b}}{\triangle\, u}\right),$$

ebből átmenve a limesre, kapjuk a szorzat differentiál-hányadosát

$$\frac{d\,(\bar{a}\ \bar{b})}{du}=\left(\frac{d\,\bar{a}}{du}\ \bar{b}\right)+\left(\bar{a}\ \frac{d\bar{b}}{du}\right)$$

vagyis tagonként differentiálhatunk. Hasonlókép vectorszorzat esetében

$$\frac{d\,[\bar{a}\ \bar{b}]}{du}=\left[\frac{d\bar{a}}{du}\ \bar{b}\right]+\left[\bar{a}\ \frac{d\,\bar{b}}{du}\right].$$

Ha az $\bar{\alpha}$ egységnyi vector, az esetben

$$(\bar{\alpha}\ \bar{\alpha})=1.$$

Ha differentiáljuk ezen kifejezést, kapjuk a

$$2\,(\bar{\alpha}\ d\ \bar{\alpha})=0$$

összefüggést, mely szerint *egységnyi vector változása mindig merőleges a vectorra.*

Ha az $\bar{a}$ vectort mint absolut értékének és egységnyi vectorának szorzatát állítjuk elő,

$$\bar{a}=a\ \bar{\alpha}$$

és így differentiáljuk, kapjuk

$$d\ \bar{a}=\bar{\alpha}\ d\ \ a+a\ d\ \bar{\alpha}$$

ha ezen kifejezés mindkét oldalát szorozzuk $\bar{\alpha}=\frac{\bar{a}}{a}$-val, tekintettel $\bar{\alpha}\ d\ \bar{\alpha}=0$ összefüggésre

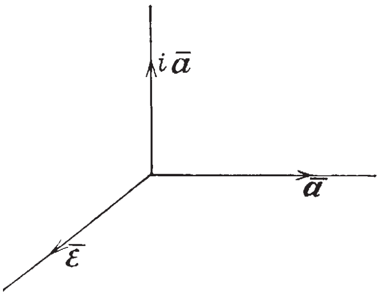
$$\bar{\alpha}\ d\ \bar{a}=\frac{\bar{a}\ \ d\ \ \bar{a}}{a}=d\ a,$$

tehát az $\bar{a}$ absolut értékének, a-nak differentiáléját megkapjuk, ha a vector differenciáléját megszorozzuk scalarisan az $\bar{a}$ egységnyi vectorával.

8. Az irányváltoztatás művelete.

Ha egy adott síkra merőleges egységnyi vector $\bar{\varepsilon}$ és $\bar{a}$ ezen síkban fekvő tetszésszerinti vector, akkor tudjuk, hogy az $[\bar{\varepsilon}\ \bar{a}]$ vector szintén az adott síkban fekszik és absolut értéke megegyezik az $\bar{a}$ absolut értékével, az a-val, iránya pedig merőleges az $\bar{a}$-ra és az $\bar{\varepsilon}$, $\bar{a}$, $[\bar{\varepsilon}\ \bar{a}]$ vectorokból álló triéder jobbsodrású derékszögű coordináta-rendszernek felel meg. Ha az adott síkot azon oldalról nézzük, mely felé az $\bar\varepsilon$ iránya halad, azt látjuk, hogy az $[\bar\varepsilon\,\bar a]$ úgy keletkezik az $\bar a$-ból, ha az $\bar a$-t az óramutató járásával ellentétben $\frac{\pi}{2}$ szöggel elforgatjuk. Nevezzük ezen óramutató mozgásával ellenkező forgást positivnak. Ezen derékszögű elforgatást jelző operatort jelöljük i-vel is, tehát

$$[\bar\varepsilon\,\bar a] = i\,\bar a.$$



10. ábra.

Ha az így nyert vectoron ismét elvégezzük ezen forgatást, kapjuk

$$\Big[\bar\varepsilon\,[\bar\varepsilon\,\bar a]\Big] = i\;i\,\bar a = i^2\bar a = -\bar a,$$

továbbá

$$[\bar\varepsilon, -\bar a] = i^3\bar a = -i\,\bar a,$$

$$[\bar\varepsilon, -i\,\bar a] = i^4\bar a = \bar a$$

stb.

Ha az $\bar a$ vectort positiv irányban ϑ szöggel forgatjuk el, mint könnyű átlátni, a keletkezett vector

$$\bar a\cos\vartheta + [\bar\varepsilon\,\bar a]\sin\vartheta = \bar a\cos\vartheta + i\,\bar a\sin\vartheta$$

lesz, vagy az $\bar a$ kiemelésével symbolikus alakban

$$\bar a\cos\vartheta + [\bar\varepsilon\,\bar a]\sin\vartheta = (\cos\vartheta + i\sin\vartheta)\,\bar a = e^{i\vartheta}\,\bar a.$$

Az $e^{i\vartheta}$ operator tehát a sík bármely vectorát positiv irányban ϑ szöggel elforgatja.

Ezen operator magában foglalja az előbbit, ugyanis ha $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, kapjuk

$$\Big[\bar\varepsilon\,\bar a\Big] = e^{i\frac{\pi}{2}}\,\bar a = i\,\bar a,$$

ha $\vartheta = \pi$,

$$-\bar a = e^{i\pi}\,\bar a = -\bar a;$$

ha $\vartheta = 3\frac{\pi}{2}$,

$$-\Big[\bar\varepsilon\,\bar a\Big] = e^{i\frac{3}{2}\pi}\,\bar a = -i\,\bar a.$$

Ezen operator továbbá a kitevős függvényen elvégezhető műveletek szabályainak is megfelel. Ha ugyanis $\bar a$ vectort előbb ϑ szögnyire, azután ψ szögnyire forgatjuk, ugyanazon eredményre kell jutnunk, mint ha $(\vartheta + \psi)$ szögnyi irányváltozást végzünk, vagyis

$$e^{i\psi}\,(e^{i\vartheta}\,\bar a) = e^{i(\vartheta+\psi)}\,\bar a.$$

Valóban a két forgatást egymásután végezve kapjuk

$$\{\bar{a}\cos\vartheta + [\bar{\varepsilon}\,\bar{a}]\sin\vartheta\}\cos\psi + \left[\bar{\varepsilon}, \bar{a}\cos\vartheta + [\bar{\varepsilon}\,\bar{a}]\sin\vartheta\right]\sin\psi$$
$$= \bar{a}\,(\cos\vartheta\cos\psi - \sin\vartheta\sin\psi) + [\bar{\varepsilon}\,\bar{a}]\,(\sin\vartheta\cos\psi + \cos\vartheta\sin\psi)$$
$$= \bar{a}\cos(\vartheta + \psi) + [\bar{\varepsilon}\,\bar{a}]\sin(\vartheta + \psi).$$

Könnyű belátni, hogy az $e^{-i\vartheta}$ operator a vectornak negativ irányban történő ϑ szögnyi elforgatását jelenti.

Ha az elforgatáson kívül a vector absolut értékét ρ-szor akkorának vesszük, kapjuk a könnyen érthető $\rho\, e^{i\vartheta}$ operatort, amely azt jelenti, hogy a vectort ϑ szöggel el kell forgatni és absolut értékét ρ-szor nagyobbítani.

Ha az $\bar{a}$ vectoron elvégezzük ezen operatort, kapjuk az új

$$\bar{r} = \rho\, e^{i\vartheta}\,\bar{a} = \rho\,\bar{a}\cos\vartheta + \rho\left[\bar{\varepsilon}\,\bar{a}\right]\sin\vartheta$$

vectort. Ezen vectort is a differentiálás közönséges szabályai szerint kezelhetjük. Pl.

$$\frac{\partial\bar{r}}{\partial\vartheta} = -\rho\,\bar{a}\sin\vartheta + \rho\left[\bar{\varepsilon}\,\bar{a}\right]\cos\vartheta =$$
$$= \rho\,[\bar{\varepsilon}\,\bar{a}]\cos\vartheta + \rho\left[\bar{\varepsilon}\,[\bar{\varepsilon}\,\bar{a}]\right]\sin\vartheta =$$
$$= \rho\, i\bar{a}\cos\vartheta + \rho\, i\, i\bar{a}\sin\vartheta = \rho\, e^{i\vartheta}\, i\bar{a}.$$

Ha az
$$\bar{r} = \rho\, e^{i\vartheta}\,\bar{a}$$
vectorban az $\bar{a}$ és ρ állandó és ϑ változó, akkor $\bar{r}$ jelent oly kört, melynek sugara ρa, ha pedig csak a ρ változó, egy az $\bar{a}$ irányához φ szöggel hajló egyenest ad.

Az
$$\bar{r} = \rho\,\vartheta\, e^{i\vartheta}\,\bar{a}$$
a ϑ változásával Archimédes-féle spiralist ír le.

A cyclois egyenlete

$$\bar{r} = a\,\vartheta\,\bar{\varepsilon}_1 + a\,\bar{\varepsilon}_2 - a\, e^{-i\vartheta}\,\bar{\varepsilon}_2$$

ha a mozgó kör sugara a.

Az irányváltoztatás műveletét szétbontva írhatjuk még:

$$\bar{r} = a\,(\vartheta + \sin\vartheta)\,\bar{\varepsilon}_1 + a\,(1 - \cos\vartheta)\,\bar{\varepsilon}_2.$$

9. A nabla-művelet.

A vectorszorzatnál láttuk, hogy az $[\bar{a}\,\bar{b}]$ szorzat absolut értéke az $\bar{a}$ és $\bar{b}$ vectok által bezárt parallelogramma területe volt, iránya pedig erre merőleges. Mondhatjuk tehát, hogy az $[\bar{a}\,\bar{b}]$ vector ezen terület vectora. Igy bármely síkfelülethez rendelhetünk egy vectort, mely nagyságában a területet adja, iránya pedig reá merőleges. A görbe felülethez a következőkép rendelhetünk felületi vectort: A felületet felosztjuk elemi részekre, melyeket síkfelületnek tekinthetünk; ha egy ily síkfelület nagysága df, akkor az erre merőleges df nagyságú $d\bar{f}$ vector ezen felület elemi vectora, ezek összessége

$$\int_F d\bar{f} = \bar{A}$$

szintén vectort ad, a *felülethez tartozó vectort.* Zárt felületnél az egyes elemi vectorok iránya mindig a normalis irányában kifelé hat. Ez esetben ezen felülethez tartozó vector eltűnik. Ha ugyanis mindegyik elemi vectort megszorozzuk az állandó irányú $\bar{\alpha}$ egységnyi vectorral, kapjuk

$$\bar{\alpha}\,\bar{A} = \int_F \bar{\alpha}\, d\bar{f} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

a mi nem más, mint a felület elemi területeinek vetülete oly síkra, mely az $\bar{\alpha}$ irányára merőleges. Ez esetben minden résznek megfelel egy ellenkező előjelű vetület és ezek összege valóban eltűnik.

Ezekután megállapíthatjuk a ∇ symbolummal jelölt nablaműveletet. A ∇-át alkalmazzuk mint vectort és szorozhatunk vele scalaris és vector-mennyiséget is. Ha a tér bizonyos tartományában értelmezve van a φ scalaris vagy az $\bar{a}$ vector-mennyiség, mint azon tartomány pontjainak függvénye, akkor a tér azon tartományának bizonyos pontjában a φ vagy $\bar{a}$ mennyiség ∇-át a következőkép kapjuk meg.* Az adott pont körül egy elemi dv köbtartalmat írunk; ezen köbtartalom F felületéhez tartozó elemi felületi vectorokat megszorozzuk a φ-nek vagy $\bar{a}$-nak a megfelelő értékével, ezeket összegezzük, ezen összeget osztjuk dv-vel és keressük ezen törtnek értékét $\lim dv = 0$ mellett. Képletben

$$\nabla\varphi = \lim_{dv=0} \frac{\int_F d\bar{f}\,\varphi}{dv} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\nabla\bar{a} = \lim_{dv=0} \frac{\int_F d\bar{f}\,\bar{a}}{dv} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

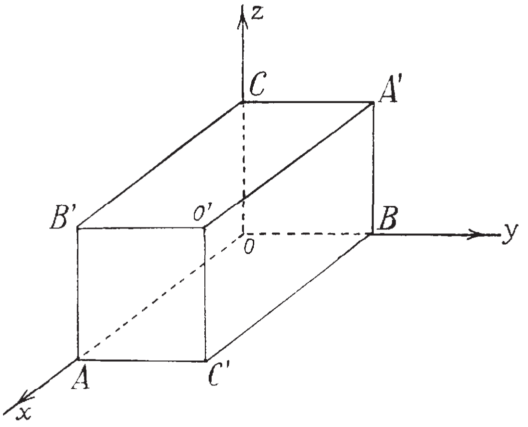
$$\left[\nabla\bar{a}\right] = \lim_{dv=0} \frac{\int_F \left[d\bar{f}\,\bar{a}\right]}{dv} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Mint látjuk, ezen mennyiségek közül az első és harmadik

---

* W. v. Ignatowsky: Die Vektoranalysis und ihre Anwendung. Teubner. I. 1909. p. 16.

vector, a középső scalaris mennyiség. Ezen mennyiségeket sorban jelöljük még grad φ, div $\bar{a}$ és rot $\bar{a}$ symbolumokkal is.



11. ábra.

Keressük meg ezen műveletek értékét derékszögű coordinátarendszer esetében és pedig a rendszer kezdőpontjára vonatkozólag. E czélból vegyünk a coordináta-rendszer kezdőpontjából kiindulva a tengelyek irányában

$$O\,A = dx,$$

$$O\,B = dy \text{ és } O\,C = dz$$

darabokat, ezekből megalkotva a kivánt térfogatot, egy $dv = dx\; dy\; dz$ köbtartalmú derékszögű hatlapot kapunk. Vizsgáljuk most a $\bar{d}f\;\varphi$ kifejezést a felület mentén. Az egyes oldallapokon a φ értékét a felület kicsisége miatt állandónak vehetjük. Ha az O pontban függvényünknek φ az értéke, akkor $O\,B\,A'\,C$, $O\,A\,B'\,C$ és $O\,B\,C'\,A$ oldallapokon is φ, míg

$$A\;C'\;O'\;B'\text{-ön}\quad \varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx,$$

$$B\;A'\;O'\;C'\text{-ön}\quad \varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dy,$$

$$C\,A'\;O'\;B'\text{-ön}\quad \varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,dz.$$

A $\bar{d}f\;\varphi$ értéke tehát az $O\,B\,A'\,C$ oldallapon

$$-\,dy\;dz\;\varphi\;\bar{\varepsilon}_1,$$

az átellenes $A\;C'\;O'\;B'$ oldallapon

$$dy\;dz\;(\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx)\;\bar{\varepsilon}_1.$$

E kettő összege $\quad \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\,\bar{\varepsilon}_1\,dv.$

Hasonlókép az y tengelyre merőleges oldallapoknál a megfelelő összeg

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\bar{\varepsilon}_2\,dv$$

és végül a z tengelyre merőleges oldallapoknál

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \bar{\varepsilon}_3 \, dv.$$

Ezek összeadásából

$$\int_F d\bar{f} \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \bar{\varepsilon}_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \bar{\varepsilon}_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \bar{\varepsilon}_3 \right) dv.$$

És így $$\underline{\operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \bar{\varepsilon}_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \bar{\varepsilon}_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \bar{\varepsilon}_3} \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (5)$$

A scalaris φ mennyiség gradiense tehát oly vector, melynek derékszögű componensei

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \; \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \; \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

vagyis a tengelyek szerint vett differentiálhányadosok. Ha a gradiens iránycosinusait α_1, α_2, α_3-al jelöljük,

$$\alpha_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{1}{A},$$

$$\alpha_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{1}{A},$$

$$\alpha_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{1}{A};$$

hol $$A = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}.$$

A gradiensnek egy tetszésszerinti ξ_1, ξ_2, ξ_3 iránycosinusokkal biró

$$\bar{\sigma} = \xi_1 \bar{\varepsilon}_1 + \xi_2 \bar{\varepsilon}_2 + \xi_3 \bar{\varepsilon}_3$$

vectorra való vetülete

$$(\bar{\sigma} \operatorname{grad} \varphi) = \xi_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \xi_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \xi_3 \frac{\partial \varphi}{\partial z} = A (\xi_1 \alpha_1 + \xi_2 \alpha_2 + \xi_3 \alpha_3)$$

$$= A \cos \xi = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}{}^{*} \; . \; . \; . \; . \; (5_1)$$

Ebből látjuk, hogy a gradiensnek bármely irányban vett vetülete egyenlő azon irányban vett differentiálhányadosával. És értéke akkor legnagyobb, ha $\xi = 0$, vagyis saját irányában, míg $\xi = \frac{\pi}{2}$ esetében $(\bar{\sigma} \operatorname{grad} \varphi) = 0$.

Az (5_1) alakot más alakban is írhatjuk

$$(d\bar{\sigma} \operatorname{grad} \varphi) = d\varphi,$$

hol a jobb oldalon $d\varphi$ jelenti a φ-nek $\bar{\sigma}$ irányban vett változását. Ha a φ több független változónak u, v, w . . .-nek függvénye, akkor

---

* E. Cesàro—G. Kowalewski: Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis. Teubner. 1904. p. 509—510.

$$(d\bar{\sigma}\ \mathrm{grad}\ \varphi)=\frac{\partial\varphi}{\partial u}du+\frac{\partial\varphi}{\partial v}dv+\ldots$$

$$\text{hol } du=(d\bar{\sigma}\ \mathrm{grad}\ u),$$

$$dv=(d\bar{\sigma}\ \mathrm{grad}\ v)\,;$$

és így

$$(d\bar{\sigma}\ \mathrm{grad}\ \varphi)=d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial u}(d\bar{\sigma}\ \mathrm{grad}\ u)+\frac{\partial\varphi}{\partial v}(d\bar{\sigma}\ \mathrm{grad}\ v)+\ldots$$

és ebből

$$\mathrm{grad}\ \varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\mathrm{grad}\ u+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\mathrm{grad}\ v+\ldots$$

Ha φ a derékszögű coordinátáknak x, y, z-nek függvénye, mivel grad $x=\bar{\varepsilon}_1$, grad $y=\bar{\varepsilon}_2$, grad $z=\bar{\varepsilon}_3$ kapjuk ismét

$$\mathrm{grad}\ \varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bar{\varepsilon}_1+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\bar{\varepsilon}_2+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\bar{\varepsilon}_3.$$

A div $\bar{a}$ számításánál, ha $\bar{a}=a_1\bar{\varepsilon}_1+a_2\bar{\varepsilon}_2+a_3\bar{\varepsilon}_3$, akkor az O B A' C oldallapon a $d\bar{f}\ \bar{a}$ értéke

$$-a_1\ dy\ dz,$$

az átellenes oldallapon

$$a_1\ dy\ dz+\frac{\partial a_1}{\partial x}dx\ dy\ dz$$

és így e két oldallapon az összeg

$$\frac{\partial a_1}{\partial x}\ dv.$$

Hasonlókép kiszámítva a többi oldallapokra kapjuk:

$$\underline{\mathrm{div}\ \bar{a}=\frac{\partial a_1}{\partial x}+\frac{\partial a_2}{\partial y}+\frac{\partial a_3}{\partial z}}\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

A rot $\bar{a}$ számítása végett az O B A' C oldallapon $[d\bar{f}\ \bar{a}]$ értéke $[-\bar{\varepsilon}_1\ dy\ dz,\ a_1\bar{\varepsilon}_1+a_2\bar{\varepsilon}_2+a_3\bar{\varepsilon}_3]$

$$=-(a_2\bar{\varepsilon}_3-a_3\bar{\varepsilon}_2)\,dy\ dz,$$

az átellenes oldallapon

$$\left[\bar{\varepsilon}_1\ dy\ dz,\left(a_1+\frac{\partial a_1}{\partial x}dx\right)\bar{\varepsilon}_1+\left(a_2+\frac{\partial a_2}{\partial x}dx\right)\bar{\varepsilon}_2+\left(a_3+\frac{\partial a_3}{\partial x}dx\right)\bar{\varepsilon}_3\right]=$$

$$=\left\{\left(a_2+\frac{\partial a_2}{\partial x}dx\right)\bar{\varepsilon}_3-\left(a_3+\frac{\partial a_3}{\partial x}dx\right)\bar{\varepsilon}_2\right\}dy\ dz.$$

Ezen két mennyiség összege

$$\left(\frac{\partial a_2}{\partial x}\bar{\varepsilon}_3-\frac{\partial a_3}{\partial x}\bar{\varepsilon}_2\right)\ dv.$$

Hasonlókép kiszámítva a többi oldallapra

$$\left(\frac{\partial a_3}{\partial y}\,\bar{\varepsilon}_1 - \frac{\partial a_1}{\partial y}\,\bar{\varepsilon}_3\right)\,dv$$

és

$$\left(\frac{\partial a_1}{\partial z}\,\bar{\varepsilon}_2 - \frac{\partial a_2}{\partial z}\,\bar{\varepsilon}_1\right)\,dv.$$

Ezek összegét osztva dv-vel, kapjuk

$$\text{rot }\bar{a} = \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z}\right)\bar{\varepsilon}_1 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x}\right)\bar{\varepsilon}_2 + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y}\right)\bar{\varepsilon}_3 \quad .\,.\,(7)$$

Ha a scalaris vagy vector-mennyiség, melyen a nabla-műveletet elvégezzük, állandó, akkor eredményül 0-át kapunk. Ez esetben ugyanis a (2), (3) és (4) kifejezés jobb oldalán a φ illetőleg $\bar{a}$ mennyiséget az egész kifejezés elé vihetjük és a megmaradt felületi integrál zárt felületnél eltűnik.

A nabla-művelettel összefüggésben bevezetjük az

$$(\bar{a}\,\nabla) = a_1\frac{\partial}{\partial x} + a_2\frac{\partial}{\partial y} + a_2\frac{\partial}{\partial z}$$

operatort,[*] melyet alkalmazhatunk scalaris és vector-mennyiségre, tehát

$$(\bar{a}\,\nabla)\,\varphi = a_1\frac{\partial\varphi}{\partial x} + a_2\frac{\partial\varphi}{\partial y} + a_3\frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad .\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(8)$$

és

$$(\bar{a}\,\nabla)\,\bar{b} = a_1\frac{\partial\bar{b}}{\partial x} + a_2\frac{\partial\bar{b}}{\partial y} + a_3\frac{\partial\bar{b}}{\partial z}. \quad .\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(9)$$

Ezen kifejezéseknek más alakot adhatunk, ha ugyanis az $\bar{a}$ vector iránycosinusai ξ_1, ξ_2, ξ_3, absolut értéke pedig a, akkor

$$a_1 = a\,\xi_1,\ a_2 = a\,\xi_2,\ a_3 = a\,\xi_3.$$

Ezen értékek helyettesítésével a (8) és (9)-ből kapjuk

$$(\bar{a}\,\nabla)\,\varphi = a\left(\xi_1\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \xi_2\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \xi_3\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = a\frac{d\varphi}{d\,a} \quad .\,.\,.\,(8_1)$$

$$(\bar{a}\,\nabla)\,\bar{b} = a\left(\xi_1\frac{\partial\bar{b}}{\partial x} + \xi_2\frac{\partial\bar{b}}{\partial y} + \xi_3\frac{\partial\bar{b}}{\partial z}\right) = a\frac{d\,\bar{b}}{d\,a}, \quad .\,.\,.\,(9_1)$$

hol $\frac{d\varphi}{d\,a}$ és $\frac{d\,\bar{b}}{d\,a}$ a φ, illetőleg a $\bar{b}$ mennyiségeknek az $\bar{a}$ vector irányában vett differentiálhányadosai.[**]

---

[*] A coordinátarendszertől független és az előzőkkel egyértelmű bevezetését l. Ignatowsky i. m. p. 21—22.

[**] E. Cesàro—G. Kowalewski: Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis... Teubner. 1904. p. 509—510.

Ha az $\bar{a} = \bar{\alpha}$ egységnyi vector, a (8_1) és (9_1)-ből kapjuk

$$(\bar{\alpha} \bigtriangledown)\ \varphi = \frac{d\,\varphi}{d\,\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8_2)$$

$$(\bar{\alpha} \bigtriangledown)\ \bar{b} = \frac{d\,\bar{b}}{d\,\alpha} \cdot \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9_2)$$

A derékszögű coordináták esetében nyert grad $x = \bar{\varepsilon}_1$ és grad $y = \bar{\varepsilon}_2$ segítségével összefüggést állapíthatunk meg a polarcoordinátákban szereplő ρ és ϑ mennyiségek gradiense között. Ezen mennyiségekre ugyanis áll

$$\vartheta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \text{ és } \rho = \sqrt{x^2 + y^2};$$

és ezekből kapjuk

$$\text{grad } \rho = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, \bar{\varepsilon}_1 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, \bar{\varepsilon}_2 = \cos\vartheta\, \bar{\varepsilon}_1 + \sin\vartheta\, \bar{\varepsilon}_2,$$

$$\text{grad } \vartheta = -\frac{y}{x^2 + y^2}\, \bar{\varepsilon}_1 + \frac{x}{x^2 + y^2}\, \bar{\varepsilon}_2 = \frac{1}{\rho}\,(-\sin\vartheta\, \bar{\varepsilon}_1 + \cos\vartheta\, \bar{\varepsilon}_2).$$

Ezek között állanak tehát ezen összefüggések

$$i \text{ grad } \rho = \rho \text{ grad } \vartheta$$

és

$$i \text{ grad } \vartheta = -\frac{\text{grad } \rho}{\rho} = -\text{grad } \log \rho.$$

10. Fontosabb összefüggések.

Az előző pont (7) és (9) képleteiből könnyen látható, hogy az $[\bar{a} \text{ rot } \bar{b}]$ és $(\bar{a} \bigtriangledown)\, \bar{b}$ kifejezések x tengely menti összetevői

$$\bar{\varepsilon}_1\, [\bar{a} \text{ rot} \bar{b}] = \left(a_2 \frac{\partial\, b_2}{\partial\, x} - a_2 \frac{\partial\, b_1}{\partial\, y} - a_3 \frac{\partial\, b_1}{\partial\, z} + a_3 \frac{\partial\, b_3}{\partial\, x}\right),$$

és

$$\bar{\varepsilon}_1 \left\{(\bar{a} \bigtriangledown)\, \bar{b}\right\} = \left(a_1 \frac{\partial\, b_1}{\partial\, x} + a_2 \frac{\partial\, b_1}{\partial\, y} + a_3 \frac{\partial\, b_1}{\partial\, z}\right)$$

lesznek. Ezen két kifejezésből kapjuk

$$\bar{\varepsilon}_1\, [\bar{a} \text{ rot} \bar{b}] + \bar{\varepsilon}_1 \left\{(\bar{a} \bigtriangledown)\, \bar{b}\right\} = \left(a_1 \frac{\partial\, b_1}{\partial\, x} + a_2 \frac{\partial\, b_2}{\partial\, x} + a_3 \frac{\partial\, b_3}{\partial\, x}\right) = \left(\bar{a} \frac{\partial\, \bar{b}}{\partial\, x}\right)$$

összefüggést. Kiszámítva a másik két tengely mentén is az összetevőket és összegezve, kapjuk

$$[\bar{a} \text{ rot } \bar{b}] + (\bar{a} \bigtriangledown)\, \bar{b} = \left(\bar{a} \frac{\partial\, \bar{b}}{\partial\, x}\right) \bar{\varepsilon}_1 + \left(\bar{a} \frac{\partial\, \bar{b}}{\partial\, y}\right) \bar{\varepsilon}_2 + \left(\bar{a} \frac{\partial\, \bar{b}}{\partial\, z}\right) \bar{\varepsilon}_3\ . \quad (1)$$

összefüggést.

Ha hozzáadjuk ehhez a

$$[\bar{b} \operatorname{rot} \bar{a}] + (\bar{b} \bigtriangledown) \bar{a} = \left(\bar{b} \frac{\partial \bar{a}}{\partial x}\right) \bar{\varepsilon}_1 + \left(\bar{b} \frac{\partial \bar{a}}{\partial y}\right) \bar{\varepsilon}_2 + \left(\bar{b} \frac{\partial \bar{a}}{\partial z}\right) \bar{\varepsilon}_3$$

egyenlőséget, akkor a következő eredményt kapjuk

$$\operatorname{grad} (\bar{a} \bar{b}) = [\bar{a} \operatorname{rot} \bar{b}] + [\bar{b} \operatorname{rot} \bar{a}] + (\bar{a} \bigtriangledown) \bar{b} + (\bar{b} \bigtriangledown) \bar{a} \; . \; . \; . \; (2)$$

Ha $\bar{a} = \bar{b}$, akkor

$$\operatorname{grad} (\bar{a}^2) = 2 [\bar{a} \operatorname{rot} \bar{a}] + 2 (\bar{a} \bigtriangledown) \bar{a} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Keressük most a div $[\bar{a} \bar{b}]$ és rot $[\bar{a} \bar{b}]$ értékeit. Ha elvégezzük az $[\bar{a} \bar{b}]$-n az előző pont (6) és (7) műveleteit, hosszas, de semmi nehézséget nem okozó számítás után kapjuk

$$\operatorname{div} [\bar{a} \bar{b}] = \bar{b} \operatorname{rot} \bar{a} - \bar{a} \operatorname{rot} \bar{b} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

és

$$\operatorname{rot} [\bar{a} \bar{b}] = \bar{a} \operatorname{div} \bar{b} - \bar{b} \operatorname{div} \bar{a} + (\bar{b} \bigtriangledown) \bar{a} - (\bar{a} \bigtriangledown) \bar{b} \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

Ha az $\bar{a} \varphi = a_1 \varphi \bar{\varepsilon}_1 + a_2 \varphi \bar{\varepsilon}_2 + a_3 \varphi \bar{\varepsilon}_2$ vectoron elvégezzük a div és rot műveletet, kapjuk

$$\operatorname{div} (\bar{a} \varphi) = \frac{\partial (a_1 \varphi)}{\partial x} + \frac{\partial (a_2 \varphi)}{\partial y} + \frac{\partial (a_3 \varphi)}{\partial z} =$$

$$= \varphi \left(\frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z}\right) + a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + a_3 \frac{\partial \varphi}{\partial z} =$$

$$= \varphi \operatorname{div} \bar{a} + \bar{a} \operatorname{grad} \varphi \; . \; (6)$$

továbbá

$$\operatorname{rot} (\bar{a} \varphi) = \left(\frac{\partial (a_3 \varphi)}{\partial y} - \frac{\partial (a_2 \varphi)}{\partial z}\right) \bar{\varepsilon}_1 + \left(\frac{\partial (a_1 \varphi)}{\partial z} - \frac{\partial (a_3 \varphi)}{\partial x}\right) \bar{\varepsilon}_2 + \left(\frac{\partial (a_2 \varphi)}{\partial x} - \frac{\partial (a_1 \varphi)}{\partial y}\right) \bar{\varepsilon}_3 =$$

$$= \varphi \operatorname{rot} \bar{a} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} a_3 - \frac{\partial \varphi}{\partial z} a_2\right) \bar{\varepsilon}_1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} a_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial x} a_3\right) \bar{\varepsilon}_2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} a_2 - \frac{\partial \varphi}{\partial y} a_1\right) \bar{\varepsilon}_3 =$$

$$= \varphi \operatorname{rot} \bar{a} + [\operatorname{grad} \varphi \, . \, \bar{a}] \; . \; (7)$$

Ezen képletek röviden írhatók még

$$\bigtriangledown (\bar{a} \varphi) = \varphi \bigtriangledown \bar{a} + \bar{a} \bigtriangledown \varphi$$

és

$$[\bigtriangledown . \bar{a} \varphi] = [\varphi, \; \bigtriangledown \bar{a}] + [\bigtriangledown \varphi, \bar{a}];$$

tehát a $\bigtriangledown$ művelet hasonlít a differentiáláshoz, vagyis a szorzaton úgy végezzük el, hogy tagonként végezzük el rajta.

Hasonlókép igazolható a

$$\bigtriangledown \varphi \psi = \operatorname{grad} \varphi \psi = \varphi \operatorname{grad} \psi + \psi \operatorname{grad} \varphi$$

összefüggés is.

Végül az előző pont (6) és (9) képlete alapján írhatjuk

$$\bar{a} \operatorname{div} \bar{a} + (\bar{a} \bigtriangledown) \bar{a} = \frac{\partial (a_1 \bar{a})}{\partial x} + \frac{\partial (a_2 \bar{a})}{\partial y} + \frac{\partial (a_3 \bar{a})}{\partial z}.$$

11. A nabla-művelet többszöri alkalmazása.

A *grad, div* és *rot* műveleteknek kifejtése és értelmezése derékszögű coordináta-rendszer esetében lehetővé teszi, hogy a nabla-müveletet ismételten könnyű szerrel alkalmazhassuk. Ily módon pár fontos összefüggést tudunk megállapitani.

Első sorban a $\nabla \varphi = \mathit{grad}\, \varphi$-re, mint vectorra alkalmazzuk a *div* és *rot* műveletet és kapjuk

$$\nabla \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi = \text{div grad}\, \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \quad \ldots (1)$$

a mi nem más, mint a φ-n a Laplace-féle

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

operator elvégzése, tehát

$$\nabla^2 \varphi = \text{div grad}\, \varphi = \triangle \varphi.$$

Ezen $\triangle$ műveletet vectoron is elvégezhetjük, pl.

$$\triangle \bar{a} = \frac{\partial^2 \bar{a}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{a}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{a}}{\partial z^2}.$$

A rotatio műveletével

$$[\nabla, \nabla \varphi] = \text{rot grad}\, \varphi = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y}\right) \bar{\varepsilon}_1 + \ldots = 0 \quad . \; . \; (2)$$

A div $\bar{a}$-ra, mint scalarisra, csak a grad műveletet alkalmazhatjuk:

$$\begin{aligned} \nabla \nabla \bar{a} = \text{grad div}\, \bar{a} = & \left(\frac{\partial^2 a_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 a_3}{\partial x \partial z}\right) \bar{\varepsilon}_1 + \\ & + \left(\frac{\partial^2 a_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 a_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_3}{\partial y \partial z}\right) \bar{\varepsilon}_2 + \quad . \; . \; (3) \\ & + \left(\frac{\partial^2 a_1}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 a_2}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 a_3}{\partial z^2}\right) \bar{\varepsilon}_3. \end{aligned}$$

Végül a rot $\bar{a}$-n elvégezhetjük a div és rot műveletet:

$$\nabla [\nabla \bar{a}] = \text{div rot}\, \bar{a} = \frac{\partial^2 a_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 a_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 a_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 a_3}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 a_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 a_1}{\partial y \partial z} = 0. \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \Big[\nabla [\nabla \bar{a}]\Big] = \text{rot rot}\, \bar{a} = & \left(\frac{\partial^2 a_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 a_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 a_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 a_3}{\partial x \partial z}\right) \bar{\varepsilon}_1 + \\ & + \left(\frac{\partial^2 a_3}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 a_2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 a_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_1}{\partial x \partial y}\right) \bar{\varepsilon}_2 + \quad (5) \\ & + \left(\frac{\partial^2 a_1}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 a_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 a_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_2}{\partial y \partial z}\right) \bar{\varepsilon}_3. \end{aligned}$$

Ha a (3)-ból kivonjuk az (5) alatti kifejezést, kapjuk ezen összefüggést

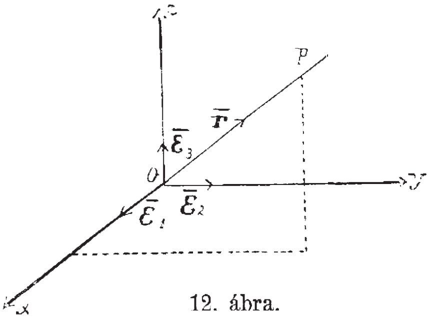
$$\text{grad div}\, \bar{a} - \text{rot rot}\, \bar{a} = \triangle \bar{a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

II. RÉSZ.

A vectorszámítás alkalmazása az infinitesimalis geometriára.

12. A pont, vonal és felület vectoregyenlete.

A térnek minden pontja kifejezhető három, nem egy síkba eső $\bar{\varepsilon}_1$, $\bar{\varepsilon}_2$, $\bar{\varepsilon}_3$ egységnyi vector segítségével. Legyen adva az O pontból kiinduló jobb-sodrású ferdeszögű vagy derékszögű (x, y, z) coordináta-rendszer és mindegyik irányban az egységnyi hosszú $\bar{\varepsilon}_1$, $\bar{\varepsilon}_2$ és $\bar{\varepsilon}_3$ vector.



12. ábra.

Ha a tér egy P pontjának coordinátái x, y, z, akkor $\overline{OP} = P - O = \bar{r} = x\bar{\varepsilon}_1 + y\bar{\varepsilon}_2 + z\bar{\varepsilon}_3$ radius-vectort a *pont egyenletének* mondjuk. Az $\bar{r}$ absolut értéke $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Az (xy) sík pontjainál $z = 0$, hasonlókép az $(y\ z)$ síkban $x = 0$ és a (zx) síkban $y = 0$.

Ha a P pont coordinátái valamely u változónak folytonos és differentiálható függvényei

$$x = \varphi_1(u), \qquad y = \varphi_2(u), \qquad z = \varphi_3(u),$$

akkor az

$$\bar{r} = \overline{f(u)} = \varphi_1(u)\bar{\varepsilon}_1 + \varphi_2(u)\bar{\varepsilon}_2 + \varphi_3(u)\bar{\varepsilon}_3 \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (1)$$

vector P pontja az u változásával bizonyos vonalat ír le és az (1) ezen *vonal paraméteres egyenlete.* Ha valamelyik coordináta értéke állandó, akkor az (1) síkbeli vonal egyenletét szolgáltatja, ellenkező esetben térbeli görbét kapunk.

Ha pedig a P coordinátái az u és v változóknak folytonos és differentiálható függvényei

$$x = \varphi_1(u, v), \quad y = \varphi_2(u, v), \quad z = \varphi_3(u, v),$$

akkor az

$$\bar{r} = \overline{F}(u, v) = \varphi_1(u, v)\bar{\varepsilon}_1 + \varphi_2(u, v)\bar{\varepsilon}_2 + \varphi_3(u, v)\bar{\varepsilon}_3 \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

radius-vector P végpontja bizonyos felületet ír le az u és v változásával. A (2) egyenletet a *felület paraméteres vagy Gauss-féle egyenletének* mondjuk.

A síkbeli vonal, térbeli vonal és felület egyenletét meghatározhatjuk még

$$g(x, y) = 0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$
$$G(x, y, z) = 0, \quad H(x, y, z) = 0 \quad\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$
$$G(x, y, z) = 0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

egyenletekkel is. Mint később látni fogjuk, ezen egyenletek is alkalmasak vectorszámításra.

Ha ugyanis ezen egyenletek helyett a

$$g(x. y) = C \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3_1)$$
$$G(x, y, z) = C_1, \quad H(x, y, z) = C_2 \quad\ldots\ldots\ldots \quad (4_1)$$
$$G(x, y, z) = C \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5_1)$$

egyenleteket hozzuk be, melyek az úgynevezett *scalaris-teret* értelmezik, oly értelemben, hogy ezen egyenletek alapján a sík, illetőleg a tér minden pontjához tartozik egy, vagy a (4_1) alapján két scalaris érték. Ezen scalaris mennyiségek gradiense alkalmassá teszi e vonalakat és felületeket vectorszámításra.

A scalaris tér analogiájára a *vector-teret* is értelmezhetjük. Az $\bar{a} = \bar{a}(x, y, z)$ összefüggés értelmében ugyanis a tér minden pontjához tartozik egy vector, melynek kezdőpontja az (x, y, z) pont. Ezen vectorok összesége adja a vector-teret. Az $\bar{a}(x, y, z)$ absolut értékét a vector-tér *intensitásának* hívjuk.

Felületelméletileg fontosabb a coordináta-rendszer kezdőpontjából kiinduló radius-vectorokkal értelmezett tér. Az

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v, w)$$

összefüggés alapján az (u, v, w) változók minden értékéhez tartozik egy-egy radius-vector. Ezen vector-térben $w =$ const. esetében az

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v, \text{const})$$

felület egyenletét kapjuk. Hasonlóképen a $v =$ const. és $u =$ const. esetében is. A tér egyes pontjain tehát három felület és ezekkel meghatározott három vonal halad át.

A következőkben egymásután tárgyaljuk a síkgörbéket, térgörbéket és felületeket a vector-egyenletük alapján. Tárgyalásunkban az $\bar{r}$ az origóból kiinduló radius-vectort fog jelenteni, hacsak az ellenkezőt nem állítjuk.

I. FEJEZET.

Síkgörbék elmélete.

13. A tangens és normalis.

Az $(x y)$ síkban lévő síkgörbe vector-egyenlete legyen

$$\bar{r} = \varphi_1(u)\bar{\varepsilon}_1 + \varphi_2(u)\bar{\varepsilon}_2 = \bar{f}(u),$$

vagy

$$P = O + \bar{r}.$$

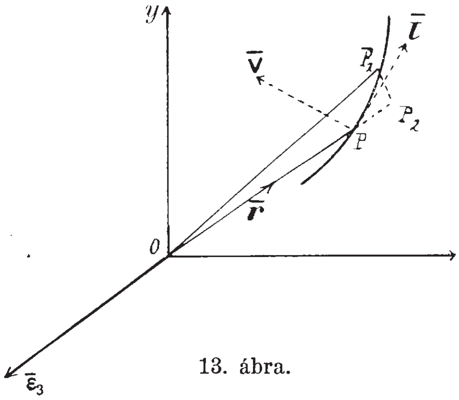
Vizsgáljuk a görbét az u által meghatározott P pont szomszédságában. Legyen egy szomszédos pont a P_1, melynek paramétere $u + \triangle u$, a radius-vector ezen pontban

$$\bar{r} + \triangle \bar{r} = \bar{f}(u + \triangle u),$$

hol

$$\triangle \bar{r} = \overline{PP_1} = \bar{f}(u + \triangle u) - \bar{f}(u)$$

hurral. Ha a $\triangle \bar{r}$-et elosztjuk a paraméter $\triangle u$ növekedésével és átmegyünk a $\lim \triangle u = 0$-ra, mivel feltevésünk szerint $\varphi_1(u)$ és $\varphi_2(u)$ is differentiálhatók, kapjuk a szokásos jelöléssel



13. ábra.

$$\frac{d\bar{r}}{du} = \bar{r}' = \lim_{\triangle u = 0} \frac{\bar{f}(u + \triangle u) - \bar{f}(u)}{\triangle u} = \varphi_1'(u)\bar{\varepsilon}_1 + \varphi_2'(u)\bar{\varepsilon}_2,$$

vagy másként még differentiál-alakban

$$d\bar{r} = \varphi_1'(u)\, du\, \bar{\varepsilon}_1 + \varphi_2'(u)\, du\, \bar{\varepsilon}_2.$$

A $d\bar{r}$ absolut értéke, vagyis a PP_1 húr hosszának a limese az ívelem, mit ds-el jelzünk, tehát

$$|d\bar{r}| = ds = \sqrt{\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2}\, du.$$

Ettől lényegesen különbözik az $\bar{r}$ vector absolut értékének $r = \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}$-nek differentiáléja, mely a PP_1 hosszának a limese, ennek értéke

$$dr = \frac{\varphi_1\varphi_1' + \varphi_2\varphi_2'}{\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}} du,$$

és ez nem más, mint $d\bar{r}$-nek $\bar{r}$ irányára való vetülete, mert

$$\left(\frac{\bar{r}}{r} d\bar{r}\right) = \frac{1}{r}(\bar{r}\, d\bar{r}) = \frac{\varphi_1\varphi_1' + \varphi_2\varphi_2'}{\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}} \quad .$$

Ha a
$$\triangle\bar{r} = \bar{f}(u + \triangle u) - \bar{f}(u)$$
vectort elosztjuk $|\triangle \bar{r}|$-el, megkapjuk a $\overline{PP}_1$ húr irányát jelző egységnyi vectort, melynek limese a tangens irányát adja, mit $\bar{\tau}$-val jelölünk és így

$$\bar{\tau} = \lim_{\triangle u = 0} \frac{\triangle \bar{r}}{|\triangle \bar{r}|} = \frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{\bar{r}'}{s'} = \frac{\varphi_1'}{s'}\bar{\varepsilon}_1 + \frac{\varphi_2'}{s'}\bar{\varepsilon}_2 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

ha az u parameter szerint vett differentiál-hányadost a szokásos rövidítéssel jelezzük.

Definitióképen a görbe normalisának egységnyi vectora legyen oly $\bar{\nu}$ vector, hogy a $(\bar{\tau}, \bar{\nu}, \bar{\varepsilon}_3)$ oly rendszert adjon, mint az $(\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \bar{\varepsilon}_3)$ rendszer, tehát mivel $\bar{\varepsilon}_3$ merőleges $\bar{\tau}$-ra,

$$\bar{\nu} = [\bar{\varepsilon}_3\,\bar{\tau}] = \frac{1}{ds}[\bar{\varepsilon}_3\, d\bar{r}] = \frac{1}{s'}[\bar{\varepsilon}_3\,\bar{r}'] = -\frac{\varphi_2'}{s'}\bar{\varepsilon}_1 + \frac{\varphi_1'}{s'}\bar{\varepsilon}_2. \quad \ldots \quad (3)$$

A (2) alapján a görbe P pontjához tartozó érintő egyenlete

$$Q = P + \bar{\tau}v = O + \bar{r} + \frac{\bar{r}'}{s'}v =$$
$$= O + \left(\varphi_1 + v\frac{\varphi_1'}{s'}\right)\bar{\varepsilon}_1 + \left(\varphi_2 + v\frac{\varphi_2'}{s'}\right)\bar{\varepsilon}_2. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Ha ezen kifejezésben az u állandó és v változik, akkor Q leírja a P ponthoz tartozó érintőt, ha pedig az u változik és a v állandó, akkor oly görbét kapunk, mely az eredetiből úgy származik, hogy az érintőjére az érintési pontból kiindulva, az állandó v távolságot lemérjük.

A (3) alapján a görbe normalisának egyenlete

$$Q = P + \bar{\nu}v = O + \left(\varphi_1 - v\frac{\varphi_2'}{s'}\right)\bar{\varepsilon}_1 + \left(\varphi_2 + v\frac{\varphi_1'}{s'}\right)\bar{\varepsilon}_2. \quad \ldots \quad (5)$$

Ezen kifejezésben ismét, ha v állandó és u változó, szolgáltat oly görbét, mely úgy keletkezik az eredeti görbéből, hogy annak normalisára az állandó v távolságot rámérjük. Ezen görbét az eredeti *párhuzamos görbéjének* mondjuk, mert megfelelő pontokban a két görbe érintője párhuzamos. Az (5) egyenletből ugyanis állandó v mellett

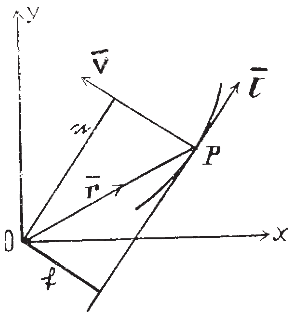
$$dQ = dP + d\bar{\nu}\,.\,v$$

Ha ezt scalarisan szorozzuk $\bar{\nu}$-vel, lévén $\bar{\nu}dP = 0$ és $\bar{\nu}d\bar{\nu} = 0$, kapjuk

$$dQ\,.\,\bar{\nu} = 0,$$

tehát az új görbének is ugyanaz a normalisa.

A tangens és normalis egységnyi vectorának segítségével megállapíthatjuk a coordinátarendszer kezdőpontjának távolságát az érintőtől és normalistól. Ezen hosszúságokra ugyanis áll



14. ábra.

$$\mathfrak{t} = (\bar{r}\bar{v}) = \frac{\varphi_2 \varphi_1{}' - \varphi_1 \varphi_2{}'}{s'} = \frac{\varphi_2{}^2}{s'} \frac{d}{du} \left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)$$

és

$$\mathfrak{n} = (\bar{r}\bar{\tau}) = \frac{\varphi_1 \varphi_1{}' + \varphi_2 \varphi_2{}'}{s'} = \frac{(\bar{r}\bar{r}')}{s'}.$$

A $\mathfrak{t}$ és $\mathfrak{n}$ értékeit négyzetre emelve és összegezve kapjuk

$$\mathfrak{t}^2 + \mathfrak{n}^2 = \varphi_1{}^2 + \varphi_2{}^2 = r^2.$$

Ezen távolságok felhasználásával megállapíthatjuk az origonak a tangensre és a normalisra vonatkozó talppontgörbéjét. Ezen két görbe egyenlete

$$Q_{\mathfrak{t}} = O \pm (\bar{r}\bar{v})\,\bar{v}$$

és

$$Q_{\mathfrak{n}} = O \pm (\bar{r}\bar{\tau})\,\bar{\tau}.$$

Végül még meghatározzuk a görbe *elemi területét*, vagyis a síknak azon részét, melyet a görbe két szomszédos radius-vectora és a görbének ezek között lévő íve határol. Ezen elemi terület

$$d\bar{\sigma} = \frac{1}{2} [\bar{r}\, d\bar{r}] = \frac{1}{2} (\varphi_1 \varphi_2{}' - \varphi_2 \varphi_1{}')\, du\, \bar{\varepsilon}_3$$

vector absolut értékével egyenlő, vagyis

$$d\sigma = \frac{1}{2} \varphi_1{}^2 d \left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right).$$

A síkgörbe egyenletét polárcoordinátákban is megadhatjuk. Ha ugyanis $\bar{\varepsilon}_1$ a polártengely iránya és a ϑ irányszögtől függő $\bar{\rho}(\vartheta)$ vector mindig $\bar{\varepsilon}_1$ irányú, akkor ezen vectoron $e^{i\vartheta}$ forgatást kell végeznünk, hogy a ϑ irányba jusson. A görbe egyenlete tehát

$$\bar{r} = e^{i\vartheta}\, \bar{\rho}(\vartheta).$$

A tárgyalás azonban egyszerűbb, ha a polárcoordinátában adott görbét is a Descartes-féle coordinátarendszerre vezetjük vissza. Ha a görbe poláregyenlete $\rho = \rho(\vartheta)$, akkor Descartes-féle coordinátákban a vector-egyenlete lesz

$$\bar{r} = \rho(\vartheta) \cos \vartheta\, \bar{\varepsilon}_1 + \rho(\vartheta) \sin \vartheta\, \bar{\varepsilon}_2, \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

ebből az ívelem

$$d\bar{r} = (\rho' \cos \vartheta - \rho \sin \vartheta)\, d\vartheta\, \bar{\varepsilon}_1 + (\rho' \sin \vartheta + \rho \cos \vartheta)\, d\vartheta\, \bar{\varepsilon}_2 \ldots\ldots \quad (6)$$

négyzete pedig

$$ds^2 = (\rho^2 + \rho'^2)\, d\vartheta^2. \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Az érintő egységnyi vectora

$$\bar{\tau} = \frac{\rho' \cos\vartheta - \rho \sin\vartheta}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}\, \bar{\varepsilon}_1 + \frac{\rho' \sin\vartheta + \rho \cos\vartheta}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}\, \bar{\varepsilon}_2,$$

a normalisé pedig

$$\bar{\nu} = -\frac{\rho' \sin\vartheta + \rho \cos\vartheta}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}\, \bar{\varepsilon}_1 + \frac{\rho' \cos\vartheta - \rho \sin\vartheta}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}\, \bar{\varepsilon}_2.$$

Ha a radius-vector és az érintő által bezárt szöget ω-val jelöljük, akkor $\bar{\tau}\bar{r} = r \cos\omega$ és mivel $r = \rho$, kapjuk

$$\cos\omega = \frac{\rho'}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}$$

és ebből

$$\sin\omega = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}},$$

ezekből

$$tg\, \omega = \frac{\rho}{\rho'}.$$

Az elemi terület vectora

$$d\bar{\sigma} = \frac{1}{2}\, [\bar{r}\, d\bar{r}] = \frac{1}{2}\, \rho^2\, d\vartheta\, \bar{\varepsilon}_3,$$

absolut értéke pedig

$$d\sigma = \frac{1}{2}\, \rho^2\, d\vartheta.$$

Polarcoordináták esetében végül az érintő és normalis távolsága az origótól

$$\mathfrak{n} = \bar{\tau}\bar{r} = \frac{\rho\rho'}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$$\mathfrak{t} = \bar{\nu}\bar{r} = -\frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Ebből ismét kapjuk a

$$\mathfrak{t}^2 + \mathfrak{n}^2 = \rho^2 = r^2$$

eredményt.

Példák. 1. Az a és b tengelyű ellipsis egyenlete

$$\bar{r} = a \cos u\, \bar{\varepsilon}_1 + b \sin u\, \bar{\varepsilon}_2$$

$$s' = \sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}$$

$$\bar{\tau} = -\frac{a}{s'} \sin u \bar{\varepsilon}_1 + \frac{b}{s'} \cos u \bar{\varepsilon}_2, \quad \bar{\nu} = -\frac{b}{s'} \cos u \bar{\varepsilon}_1 - \frac{a}{s'} \sin u \bar{\varepsilon}_2.$$

A tangens egyenlete

$$Q = O + \frac{a}{s'}\, (s' \cos u - v \sin u)\, \bar{\varepsilon}_1 + \frac{b}{s'}\, (s' \sin u + v \cos u)\, \bar{\varepsilon}_2,$$

a normalisé

$$Q = O + \frac{\cos u}{s'}(as' - bv)\,\bar{\varepsilon}_1 + \frac{\sin u}{s'}(bs' - av)\,\bar{\varepsilon}_2.$$

2. Az a és b tengelyű hyperbola egyenlete

$$P = O + \frac{a}{\cos u}\,\bar{\varepsilon}_1 + b \operatorname{tg} u\, \bar{\varepsilon}_2,$$

vagy $\bar{r} = a \cos hu \,.\, \bar{\varepsilon}_1 + b \sin hu\, \bar{\varepsilon}_2.$

$$s' = \frac{\sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2}}{\cos^2 u}.$$

A tangens egyenlete:

$$Q = O + \frac{a}{\cos^2 u}(\cos u + v \sin u)\,\bar{\varepsilon}_1 + \frac{b}{\cos^2 u}(\sin u \cos u + v)\,\bar{\varepsilon}_2,$$

a normalisé pedig:

$$Q = O + \frac{1}{\cos^2 u}(a \cos u - bv)\,\bar{\varepsilon}_1 + \frac{\sin u}{\cos^2 u}(b \cos u + av)\,\bar{\varepsilon}_2.$$

3. A parabola egyenlete

$$\bar{r} = \frac{u^2}{2p}\,\bar{\varepsilon}_1 + u\bar{\varepsilon}_2,$$

$$s' \quad \sqrt{\frac{u^2}{p^2} + 1} = \frac{1}{p}\sqrt{u^2 + p^2}.$$

A tangens egyenlete

$$Q = O + \frac{1}{2p\,s'}(s'\,u^2 + 2uv)\,\bar{\varepsilon}_1 + \frac{1}{s'}(us' + v)\,\bar{\varepsilon}_2,$$

a normalisé

$$Q = O + \frac{1}{2p\,s'}(u^2 s' - 2pv)\,\bar{\varepsilon}_1 + \frac{u}{p\,s'}(p\,s' + v)\,\bar{\varepsilon}_2.$$

4. A lánczvonal egyenlete

$$\bar{r} = u\bar{\varepsilon}_1 + a \cos h \frac{u}{a} \,.\, \bar{\varepsilon}_2,$$

$$s' = \sqrt{1 + \sin h^2 \frac{u}{a}} = \cos h \frac{u}{a}.$$

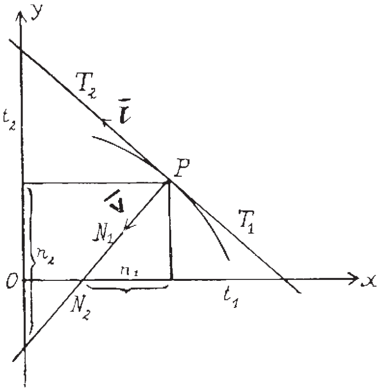
Tangensének egyenlete:

$$Q = O + u\,\bar{\varepsilon}_1 + a \cos h \frac{u}{a} \,.\, \bar{\varepsilon}_2 + \frac{v}{s'}\,\bar{\varepsilon}_1 + \frac{v}{s'} \sin h \frac{u}{a}\,\bar{\varepsilon}_2,$$

a normalisáé pedig:

$$Q = O + u\,\bar{\varepsilon}_1 + a \cos h \frac{u}{a}\,\bar{\varepsilon}_2 - \frac{v}{s'} \sin h \frac{u}{a} \,.\, \bar{\varepsilon}_1 + \frac{v}{s'}\,\bar{\varepsilon}_2.$$

14. A Descartes-féle tangens, normalis, subtangens és subnormalis hossza.



15. ábra.

A síkgörbe tangensének azon részét, mely az érintési pont és az x tengely között fekszik, az *x tengelyre vonatkozó tangens*-nek mondjuk és T_1-el jelöljük, ennek vetülete az x tengelyre vonatkozólag a t_1 subtangens. A normalisnak a görbe pontja és az x tengely között lévő része N_1 az *x tengelyre vonatkozó normalis,* ennek vetülete n_1 a subnormalis.

Hasonlókép T_2 a tangensnek azon része, melyet az érintési ponttól számítva, az y tengely lemetsz, ennek vetülete az y tengelyre t_2, N_2 pedig a normalis darabja, melyet az y tengely és a görbe pontja határol, ennek vetülete az y tengelyre n_2.

Az ábra alapján könnyű felírni ezen egyenlőségeket:

$$\begin{aligned}\bar{r} &= (\varphi_1 + t_1)\,\bar{\varepsilon}_1 + T_1\,\bar{\tau},\\ \bar{r} &= (\varphi_2 + t_2)\,\bar{\varepsilon}_2 + T_2\,\bar{\tau},\\ \bar{r} &= (\varphi_1 + n_1)\,\bar{\varepsilon}_1 + N_1\,\bar{\nu},\\ \bar{r} &= (\varphi_2 + n_2)\,\bar{\varepsilon}_2 + N_2\,\bar{\nu}.\end{aligned}$$

Ha ezen egyenletek közül az elsőt és a harmadikat scalarisan szorozzuk az $\bar{\varepsilon}_2$-vel, a másodikat és negyediket $\bar{\varepsilon}_1$-el, kapjuk

$$\left.\begin{aligned} \varphi_2 &= T_1\frac{\varphi_2'}{s'}, & T_1 &= \frac{\varphi_2}{\varphi_2'}\,s',\\ \varphi_1 &= T_2\frac{\varphi_1'}{s'}, & T_2 &= \frac{\varphi_1}{\varphi_1'}\,s',\\ \varphi_2 &= N_1\frac{\varphi_1'}{s'}, & N_1 &= \frac{\varphi_2}{\varphi_1'}\,s',\\ \varphi_1 &= -N_2\frac{\varphi_2'}{s'}, & N_2 &= -\frac{\varphi_1}{\varphi_2'}\,s'.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

Ha pedig az elsőt és harmadikat $\bar{\varepsilon}_1$-el, a másik kettőt $\bar{\varepsilon}_2$-vel szorozzuk scalarisan, kapjuk

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1 &= \varphi_1 + t_1 + T_1 \frac{\varphi_1{}'}{s'}, & t_1 &= -\varphi_2 \frac{\varphi_1{}'}{\varphi_2{}'},\\
\varphi_2 &= \varphi_2 + t_2 + T_2 \frac{\varphi_2{}'}{s'}, & t_2 &= -\varphi_1 \frac{\varphi_2{}'}{\varphi_1{}'},\\
\varphi_1 &= \varphi_1 + n_1 - N_1 \frac{\varphi_2{}'}{s'}, & n_1 &= \varphi_2 \frac{\varphi_2{}'}{\varphi_1{}'},\\
\varphi_2 &= \varphi_2 + n_2 + N_2 \frac{\varphi_1{}'}{s'}, & n_2 &= \varphi_1 \frac{\varphi_1{}'}{\varphi_2{}'}.
\end{aligned}\right\} \quad . . \ (2)$$

Ezen eredmények alapján könnyű megállapítani a következő egyszerű összefüggéseket:

$$\begin{aligned}
n_1 t_1 &= -\varphi_2{}^2,\\
n_2 t_2 &= -\varphi_1{}^2,\\
T_1 T_2 &= -N_1 N_2,\\
t_1 t_2 &= n_1 n_2.
\end{aligned}$$

Példa. Parabolánál $\varphi_1 = \frac{u^2}{2p}$, $\varphi_2 = u$, $\varphi_1{}' = \frac{u}{p}$, $\varphi_2{}' = 1$, $s' = \frac{1}{p}\sqrt{u^2 + p^2}$

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{u}{p} \sqrt{u^2 + p^2}, & t_1 &= -\frac{u^2}{p},\\
T_2 &= \frac{u}{2p} \sqrt{u^2 + p^2}, & t_2 &= -\frac{u}{2},\\
N_1 &= \sqrt{u^2 + p^2}, & n_1 &= p,\\
N_2 &= -\frac{u^2}{2p^2} \sqrt{u^2 + p^2}, & n_2 &= \frac{u^3}{2p^2}.
\end{aligned}$$

A polarcoordinátákban megadott $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(\vartheta)$ görbéknél az előző pont (5), (6) és (7) alapján csak

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \mathfrak{r} \cos\vartheta, & \varphi_2 &= \mathfrak{r} \sin\vartheta,\\
\varphi_1{}' &= \mathfrak{r}' \cos\vartheta - \mathfrak{r} \sin\vartheta, & \varphi_2{}' &= \mathfrak{r}' \sin\vartheta + \mathfrak{r} \cos\vartheta,
\end{aligned}$$
$$s' = \sqrt{\mathfrak{r}^2 + \mathfrak{r}'^2}$$

helyettesítést kell végeznünk és az (1) és (2) csoportból kapjuk

$$T_1 = \frac{\mathfrak{r} \operatorname{tg}\vartheta}{\mathfrak{r}' \operatorname{tg}\vartheta + \mathfrak{r}} \sqrt{\mathfrak{r}^2 + \mathfrak{r}'^2},$$

$$T_2 = \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}' - \mathfrak{r} \operatorname{tg}\vartheta} \sqrt{\mathfrak{r}^2 + \mathfrak{r}'^2},$$

$$N_1 = \frac{\mathfrak{r}\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}\,\mathrm{tg}\,\vartheta}\sqrt{\mathfrak{r}^2 + \mathfrak{r}'^2},$$

$$N_2 = -\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}'\,\mathrm{tg}\,\vartheta + \mathfrak{r}}\sqrt{\mathfrak{r}^2 + \mathfrak{r}'^2},$$

$$t_1 = -\frac{\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{\mathfrak{r}'\,\mathrm{tg}\,\vartheta + \mathfrak{r}}\,\mathfrak{r}\sin\vartheta,$$

$$t_2 = -\frac{\mathfrak{r}'\,\mathrm{tg}\,\vartheta + \mathfrak{r}}{\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}\,\mathrm{tg}\,\vartheta}\,\mathfrak{r}\cos\vartheta,$$

$$n_1 = \frac{\mathfrak{r}'\,\mathrm{tg}\,\vartheta + \mathfrak{r}}{\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}\,\mathrm{tg}\,\vartheta}\,\mathfrak{r}\sin\vartheta,$$

$$n_2 = \frac{\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{\mathfrak{r}'\,\mathrm{tg}\,\vartheta + \mathfrak{r}}\,\mathfrak{r}\cos\vartheta.$$

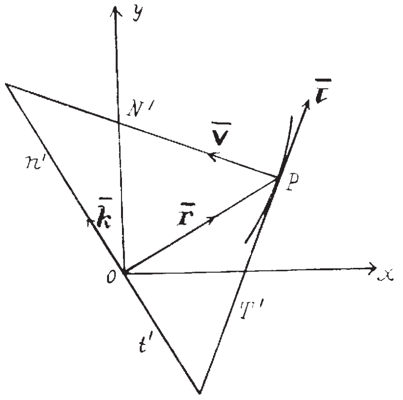
15. A polartangens, polarnormalis, polarsubtangens és polarsubnormalis hossza.

Ha a görbe P pontjához tartozó radiusvectorra az origoban merőlegest emelünk, ezen merőleges általában metszi a P pont érintőjét és normalisát. Ezen merőleges egységnyi vectorát nevezzük $\bar{\varkappa}$-nak, ez merőleges lévén $\bar{r}$-re és $\bar{\varepsilon}_3$-ra, írható

$$\bar{\varkappa} = \frac{1}{r}\,[\bar{\varepsilon}_3\,\bar{r}] \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (1)$$

Derékszögű coordináta-rendszer esetében

$$\bar{\varkappa} = -\frac{\varphi_2}{r}\,\bar{\varepsilon}_1 + \frac{\varphi_1}{r}\,\bar{\varepsilon}_2 \,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (2)$$



16. ábra.

A P ponthoz tartozó érintőnek azon darabját, mely ezen $\bar{\varkappa}$ irányú egyenessel való metszéspontja és a P pont között van, a görbe P pontjához tartozó *polartangensnek* nevezzük, ennek vetületét a $\bar{\varkappa}$ irányú egyenesre pedig *polarsubtangensnek* hívjuk. Az előbbit T', utóbbit t' betükkel jelezzük. Hasonlókép, ha a $\bar{\varkappa}$ metszi a P pont normalisát, akkor a normalis azon darabja, mely a P és ezen metszéspont között van, a görbe *polarnormalisa* N', ennek vetülete a $\bar{\varkappa}$ irányú egyenesre a *polarsubnormalis* n'. Az ábra alapján írható

$$n'\bar{\varkappa} = \bar{r} + N'\bar{\nu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$T'\bar{\tau} = \bar{r} + t'\bar{\varkappa} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Mindkét egyenletet szorozva $\bar{r}$-el kapjuk a subnormalis és subtangens hosszát

$$\left.\begin{aligned} N' &= -\frac{r^2}{\mathfrak{t}}, \\ T' &= \frac{r^2}{\mathfrak{n}}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

hol $\mathfrak{n} = \bar{r}\bar{\tau}$ és $\mathfrak{t} = \bar{r}\bar{\nu}$ a normalisnak és az érintőnek távolsága az origótól.

Ha pedig a (3) egyenlőséget $\bar{\tau}$-val, a (4)-et $\bar{\nu}$-vel szorozzuk scalarisan, kapjuk a polarsubnormalis és polarsubtangens hosszúságára:

$$\left.\begin{aligned} n' &= \frac{\mathfrak{n}}{(\bar{\tau}\bar{\varkappa})}, \\ t' &= -\frac{\mathfrak{t}}{(\bar{\nu}\bar{\varkappa})}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Ezen kifejezések nevezőjét más alakban is írhatjuk, ugyanis

$$\bar{\tau}\bar{\varkappa} = \frac{1}{r}\left[\bar{\nu}\,\bar{\varepsilon}_3\right]\left[\bar{\varepsilon}_3\,\bar{r}\right] = -\frac{\mathfrak{t}}{r},$$

$$\bar{\nu}\bar{\varkappa} = \frac{1}{r}\left[\bar{\varepsilon}_3\,\bar{\tau}\right]\left[\bar{\varepsilon}_3\,\bar{r}\right] = \frac{\mathfrak{n}}{r}.$$

És így a (6) helyett kapjuk

$$\left.\begin{aligned} n' &= -r\frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{t}}, \\ t' &= -r\frac{\mathfrak{t}}{\mathfrak{n}}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Ezen képletek alapján közvetlenül írhatjuk az ábrából is látható

$$n'\,t' = r^2$$

összefüggést.

Ha a görbe egyenlete Descartes-féle coordinátákban van adva, akkor a jelzett hosszúságok értékét a következőkép is megkaphatjuk. Szorozzuk meg a (3) és (4)-et $\bar{\varepsilon}_1$-el, az eredmény

$$-n'\frac{\varphi_2}{r} = \varphi_1 - N'\frac{\varphi_2'}{s'},$$

$$T'\frac{\varphi_1'}{s'} = \varphi_1 - t'\frac{\varphi_2}{r}.$$

Ha pedig mindkettőt $\bar{\varepsilon}_2$-vel szorozzuk scalarisan,

$$n'\frac{\varphi_1}{r} = \varphi_2 + N'\frac{\varphi_1'}{s'},$$

$$T'\frac{\varphi_2'}{s'} = \varphi_2 + t'\frac{\varphi_1}{r}$$

eredményre jutunk. Ezen négy egyenletből

$$\left.\begin{aligned} N' &= \frac{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}{\varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2}s', \\ T' &= \frac{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}{\varphi_1\varphi_1' + \varphi_2\varphi_2'}s', \\ n' &= r\frac{\varphi_1\varphi_1' + \varphi_2\varphi_2'}{\varphi_1\varphi_2' - \varphi_2\varphi_1'}, \\ t' &= r\frac{\varphi_1\varphi_2' - \varphi_2\varphi_1'}{\varphi_1\varphi_1' + \varphi_2\varphi_2'}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Ezen eredmények alapján szintén írható

$$t'n' = r^2,$$

továbbá

$$T' = r\frac{s'}{r'}$$

és

$$N' = \frac{s'}{\frac{d}{du}\left(\operatorname{arctg}\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)}.$$

Példa. A conchois. Az $\bar{r} = \bar{f}(u)$ görbe közönséges conchoisa azon új görbe, mely úgy keletkezik az alapgörbéből, ha minden radius-vectorát állandó a hosszúsággal megtoldjuk vagy megrövidítjük. Az adott görbének az origóra vonatkoztatott conchoisa

$$\bar{r}_1 = \bar{r} + \frac{\bar{r}}{r}a = \frac{r+a}{r}\bar{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

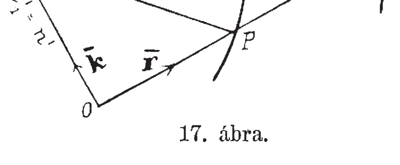
Például az $\bar{\varepsilon}_2$ tengelylyel párhuzamos és az origótól l távolságra lévő egyenes conchoisa

$$\bar{r}_1 = (l + a\cos u)(\bar{\varepsilon}_1 + \operatorname{tg} u\,\bar{\varepsilon}_2).$$

Az origón átmenő R sugarú kör conchoisa az esetben, ha a kör középpontja az $\bar{\varepsilon}_1$ tengelyben van

$$\bar{r}_1 = (2R\cos u + a)(\cos u\bar{\varepsilon}_1 + \sin u\bar{\varepsilon}_2).$$

A közönséges conchoisnál a (8) alapján az ívelem



17. ábra.

$$d\bar{r}_1 = \frac{r+a}{r}\,d\bar{r} - \frac{a\,dr}{r^2}\,\bar{r},$$

ebből a tangens iránya

$$\bar{\tau}_1 = \frac{d\bar{r}_1}{ds_1} = \left(\frac{r+a}{r}\,\bar{\tau} - \frac{a}{r^2}\,\frac{dr}{ds}\,\bar{r}\right)\frac{ds}{ds_1}.$$

A normalis iránya ugyanebből

$$\bar{\nu}_1 = \left(\frac{r+a}{r}\,\bar{\nu} - \frac{a}{r}\,\frac{dr}{ds}\,\bar{\varkappa}\right)\frac{ds}{ds_1}.$$

Ezen kifejezésekből kapjuk

$$\mathfrak{n}_1 = \left\{\frac{(r+a)^2}{r^2}\,\mathfrak{n} - \frac{(r+a)\,a}{r}\,\frac{dr}{ds}\right\}\frac{ds}{ds_1},$$

$$\mathfrak{t}_1 = \frac{(r+a)^2}{r^2}\,\mathfrak{t}\,\frac{ds}{ds_1};$$

és e kettőből, mivel $r\frac{dr}{ds} = \mathfrak{n}$, kapjuk a következő összefüggést:

$$\frac{\mathfrak{n}_1}{\mathfrak{t}_1} = \frac{r}{r+a}\,\frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{t}}.$$

Innen jutunk a polarsubnormalis hosszára, melyre nézve áll

$$n_1' = n' = -r_1\,\frac{\mathfrak{n}_1}{\mathfrak{t}_1} = -\,r\,\frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{t}},$$

vagyis a közönséges conchois polarsubnormalisa ugyanaz, mint az alapgörbéé.*

Ha a görbe egyenlete polarcoordinátákban ismeretes $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(\vartheta)$, akkor a 13. pont (8) és (9) szerint

$$\mathfrak{n} = \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{r}'}{\sqrt{\mathfrak{r}^2 + \mathfrak{r}'^2}},$$

$$\mathfrak{t} = -\frac{\mathfrak{r}^2}{\sqrt{\mathfrak{r}^2 + \mathfrak{r}'^2}}$$

és így az (5) és (7) egyenletekből kapjuk, mivel $r^2 = \mathfrak{r}^2$

$$N' = \sqrt{\mathfrak{r}^2 + \mathfrak{r}'^2},$$

$$T' = \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}'}\sqrt{\mathfrak{r}^2 + \mathfrak{r}'^2},$$

$$n' = \mathfrak{r}',$$

$$t' = \frac{\mathfrak{r}^2}{\mathfrak{r}'}.$$

---

* Wieleitner H.: Spezielle ebene Kurven. Sammlung Schubert. 1908. p. 64.

1. Pl. Archimedes spiralisánál $\mathfrak{r} = a\vartheta$, tehát

$$N' = a\sqrt{1+\vartheta^2}, \qquad T' = a\vartheta\sqrt{1+\vartheta^2},$$

$$n' = a, \qquad t' = a\vartheta^2.$$

2. A hyperbolikus spiralisnál $\mathfrak{r} = \frac{a}{\vartheta}\cdot$

$$N' = \frac{a}{\vartheta^2}\sqrt{1+\vartheta^2}, \qquad T' = -\frac{a}{\vartheta}\sqrt{1+\vartheta^2},$$

$$n' = -\frac{a}{\vartheta^2}, \qquad t' = -a.$$

3. A logarithmikus spiralis egyenlete $\mathfrak{r} = ae^{m\vartheta}$

$$N' = a\,e^{m\vartheta}\sqrt{1+m^2}, \quad . \qquad T' = \frac{a\,e^{m\vartheta}}{m}\sqrt{1+m^2},$$

$$n' = a\,m\,e^{m\vartheta}, \qquad t' = \frac{a\,e^{m\vartheta}}{m};$$

vagy másként felírva

$$N' = \mathfrak{r}\sqrt{1+m^2}, \qquad T' = \frac{\mathfrak{r}}{m}\sqrt{1+m^2},$$

$$n' = m\mathfrak{r}, \qquad t' = \frac{\mathfrak{r}}{m}\cdot$$ *

16. A görbület.

Mint láttuk, a görbe $P(u)$ pontjához tartozó érintő irányát a

$$\bar{\mathfrak{t}} = \frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{\bar{r}'}{s'}$$

egységnyi vector jelzi. Ezen irány folyton változik, ha a P pont a görbén tovább halad, változását a

$$d\bar{\mathfrak{t}} = \frac{s'\bar{r}'' - s''\bar{r}'}{s'^2}\,du$$

kifejezés mutatja. Ezen változás mindig a normalis irányával esik egybe. Szorozzuk meg ugyanis vectorképen $d\bar{\mathfrak{t}}$-t a normalis egységnyi vectorával, $\bar{\mathfrak{v}} = [\bar{\mathfrak{e}}_3\,\bar{\mathfrak{t}}]$-val, kapjuk a szétbontási szabály szerint (6. 2.)

$$\Big[d\bar{\mathfrak{t}}\,[\bar{\mathfrak{e}}_3\,\bar{\mathfrak{t}}]\Big] = (d\bar{\mathfrak{t}}\,\bar{\mathfrak{t}})\,\bar{\mathfrak{e}}_3 - (d\bar{\mathfrak{t}}\,\bar{\mathfrak{e}}_3)\,\bar{\mathfrak{t}} = 0,$$

mert $(d\bar{\mathfrak{t}}\,\bar{\mathfrak{t}}) = 0$, hisz a $(\bar{\mathfrak{t}}\bar{\mathfrak{t}}) = 1$ szorzat kétszeres differentiáléja,

---

* Czuber E.: Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. I. Band. 2. Aufl. 1906. Teubner. p. 358.

$(d\bar{\tau}\,\bar{\varepsilon}_3) = 0$, mert $d\bar{\tau}$ mint az (xy) síkban lévő vector merőleges $\bar{\varepsilon}_3$-ra. Ez alapon tehát $d\bar{\tau}$ oly irányú, mint $\bar{\nu} = [\bar{\varepsilon}_3\,\bar{\tau}]$ vector, vagyis

$$d\bar{\tau} = k\,\bar{\nu}\,du,$$

hol k valami scalaris függvénye az u-nak.

Ha mindkét oldalon az s szerint vett változást veszszük, vagyis s szerint differentiálunk, kapjuk

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{}{\rho}, \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

hol az u-nak scalaris függvényét $k = \frac{1}{\rho}$-t a görbe P pontjához tartozó *görbületi mértéknek,* vagy egyszerűen *görbületnek*, ρ-t pedig *görbületi sugárnak* nevezzük. Mivel $\bar{\nu}$ és $d\bar{\tau}$ egyirányúak és $\bar{\nu}$ egységnyi vector, ha (1)-et scalarisan szorozzuk $\bar{\nu}$-vel, kapjuk

$$\frac{1}{\rho} = \frac{(\bar{\nu}\,d\bar{\tau})}{ds} = \frac{(\bar{\nu}\,\bar{\tau}')}{s'} = \frac{1}{s'^3}(\bar{\nu},\ s'\bar{r}'' - s''\,\bar{r}').$$

Helyettesítve a 13. pont (3) képletét és kifejtve kapjuk

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{s'^4}\left\{-\varphi_2'\,(s'\,\varphi_1'' - s''\,\varphi_1') + \varphi_1'\,(s'\,\varphi_2'' - s''\,\varphi'_2)\right\},$$

vagy rendezés után

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\varphi_1'\,\varphi_2'' - \varphi_2'\,\varphi_1''}{s'^3} = \frac{d}{ds}\left(\operatorname{arctg}\frac{\varphi_2'}{\varphi_1'}\right).$$

A görbületi sugár értéke pedig a P pontban

$$\rho = \frac{s'^3}{\varphi_1'\,\varphi_2'' - \varphi_2'\,\varphi_1''} = \frac{(\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2)^{3/2}}{\varphi_1'\,\varphi_2'' - \varphi_2'\,\varphi_1''}. \quad \dots\dots \quad (2)$$

A görbe P pontjához tartozó normalisnak azon M pontját, melynek távolsága a P-től ρ-val egyenlő, a görbe P pontjához tartozó *görbületi középpontnak* hívjuk, ennek egyenlete

$$M = P + \rho\bar{\nu}. \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

Ha ezen egyenletben u változó, akkor M az adott görbe görbületi középpontjainak mértani helyét írja le, mit *evolutának* nevezünk. A (3) tehát változó u mellett a görbe evolutájának egyenlete.

Teljesen felírva az evoluta egyenlete lesz

$$M = O + \left(\varphi_1 - \frac{s'^2\,\varphi_2'}{\varphi_1'\,\varphi_2'' - \varphi_2'\,\varphi_1''}\right)\bar{\varepsilon}_1 + \left(\varphi_2 + \frac{s'^2\,\varphi_1'}{\varphi_1'\,\varphi_2'' - \varphi_2'\,\varphi_1''}\right)\bar{\varepsilon}_2.$$

Az (1) kapcsolat felhasználásával kiszámíthatjuk még a normalisnak az s szerint vett differentiál-hányadosát is. Differentiáljuk a $\bar{\nu} = [\bar{\varepsilon}_3\ \bar{\tau}]$ egyenletet az ívelem szerint és használjuk fel az (1)-et, kapjuk

$$\frac{d\bar{\nu}}{ds} = \left[\bar{\varepsilon}_3 \frac{\bar{\nu}}{\rho}\right] = -\frac{\bar{\tau}}{\rho}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

a $\bar{\nu}$ változása tehát párhuzamos az érintővel.

Az (1) és (4) további differentiálásával kapjuk

$$\frac{d^2\bar{\tau}}{ds^2} = -\frac{\bar{\tau}}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{ds}\bar{\nu},$$

$$\frac{d^2\bar{\nu}}{ds^2} = -\frac{\bar{\nu}}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{ds}\bar{\tau}.$$

Az (1) és (4) a térbeli görbék Frenet-féle formuláinak felel meg.

Ha a görbe egyenletét polárcoordinátákban ismerjük $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(\vartheta)$, a 13. pont (6) és (7) képleteiből kapjuk

$$s' = \sqrt{\mathfrak{r}^2 + \mathfrak{r}'^2},$$

$$\varphi_1' = \mathfrak{r}' \cos\vartheta - \mathfrak{r}\sin\vartheta,$$

$$\varphi_2' = \mathfrak{r}' \sin\vartheta + \mathfrak{r}\cos\vartheta,$$

$$\varphi_1'' = \mathfrak{r}'' \cos\vartheta - 2\,\mathfrak{r}'\sin\vartheta - \mathfrak{r}\cos\vartheta,$$

$$\varphi_2'' = \mathfrak{r}'' \sin\vartheta + 2\,\mathfrak{r}'\cos\vartheta - \mathfrak{r}\sin\vartheta.$$

Helyettesítve ezen értékeket, a (2) be, kapjuk

$$\rho = \frac{(\mathfrak{r}^2 + \mathfrak{r}'^2)^{3/2}}{\mathfrak{r}^2 + 2\,\mathfrak{r}'^2 - - \mathfrak{r}\mathfrak{r}''}.$$

Pl. 1. Az ellipsisnél

$$\bar{r} = a\cos u\,\bar{\varepsilon}_1 + b\sin u\,\bar{\varepsilon}_2,$$

$$s' = \sqrt{a^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u}.$$

A görbületi sugárra kapjuk, mivel $\varphi_1'\varphi_2'' - \varphi_1''\varphi_2' = ab$,

$$\rho = \frac{s'^3}{ab}.$$

Az evoluta egyenlete

$$M = O + \frac{\cos u}{a}(a^2 - s'^2)\,\bar{\varepsilon}_1 + \frac{\sin u}{b}(b^2 - s'^2)\,\bar{\varepsilon}_2 =$$

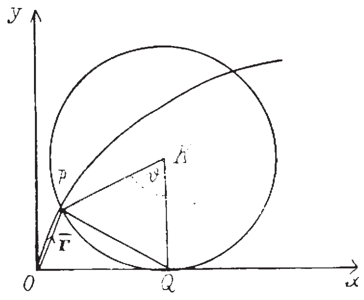
$$= \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 u\,\bar{\varepsilon}_1 + \frac{b^2 - a^2}{b}\sin^3 u\,\bar{\varepsilon}_2.$$

A 13. pont szerint az origónak az érintőtől való távolsága

$$\mathfrak{t} = \bar{\nu}\,\bar{r} = -\frac{ab}{s'}$$

és így kapjuk ezen összefüggést

$$\rho\, t^3 = -a^2 b^2 = \text{const.}$$



18. ábra.

2. A cyclois egyenlete $P = O + (Q - O) + (K - Q) + (P - K)$ alapján*

$$\bar{r} = a\vartheta\bar{\varepsilon}_1 + a\bar{\varepsilon}_2 - a e^{-i\vartheta}\bar{\varepsilon}_2 \quad . \; . \; . \; (5)$$

ebből az $\bar{r}$-nek a ϑ változó szerint vett deriváltja

$$\bar{r}' = a\left(\bar{\varepsilon}_1 + e^{-i\vartheta} i\bar{\varepsilon}_2\right);$$

ez mutatja a görbe tangensének irányát, a normalisét pedig

$$i\bar{r}' = a\left(\bar{\varepsilon}_2 - e^{-i\vartheta}\bar{\varepsilon}_2\right) = P - Q,$$

vagyis a cyclois normalisa keresztül megy a haladó kör azon pontján, melyben az alapegyenest érinti. Az (5) egyenletet kifejtve írhatjuk

$$\bar{r} = a(\vartheta - \sin\vartheta)\,\bar{\varepsilon}_1 + a(1 - \cos\vartheta)\,\bar{\varepsilon}_2.$$

Ezen képlet alapján

$$s'^2 = 2a^2(1 - \cos\vartheta) = 4a^2 \sin^2\frac{\vartheta}{2}$$

és

$$\varphi_1' \varphi_2'' - \varphi_2' \varphi_1'' = a^2(\cos^2\vartheta - 1) = -2a^2 \sin^2\frac{\vartheta}{2}.$$

A görbületi sugár értéke tehát

$$\rho = -4a \sin\frac{\vartheta}{2}.$$

Az evolutája pedig

$$\begin{aligned} M &= O + a(\vartheta + \sin\vartheta)\,\bar{\varepsilon}_1 + a(-1 + \cos\vartheta)\,\bar{\varepsilon}_2 \\ &= O - a\pi\bar{\varepsilon}_1 - 2a\bar{\varepsilon}_2 + \bar{r}(\pi + \vartheta), \end{aligned}$$

a mi szintén cyclois, csak eltolva a régihez.

17. Vectormezővel értelmezett görbesereg burkoltja.

Ha valamely síkgörbe vector-egyenletében az u paraméteren kívül más v változó is szerepel, akkor az $\bar{r} = \bar{f}(u, v)$ vectormező egyenlete a v különböző értékeihez más és más görbét szolgáltat, az így keletkezett végtelen sok görbét *görbeseregnek* mondjuk.

---

* Burali—Forti C.: Introduction à la géométrie différentielle suivant la méthode de H. Grassmann. 1897. Gauthier. Paris. p. 68.

Ezen görbesereg szomszédos görbéi általában metszik egymást, és ezen metszéspontok határhelye ujabb görbét ad, mit a görbesereg *burkoltjának* nevezünk.

Legyen a görbesereg egyik (v) görbéjének (u) pontja

$$\bar r = \bar f(u, v) = \varphi_1(u, v)\,\bar\varepsilon_1 + \varphi_2(u, v)\,\bar\varepsilon_2$$

egyenlettel adva. Az ehhez szomszédos $(v + dv)$ görbén az előbbihez közelfekvő pont egyenlete

$$\bar r_1 = \bar f(u + du,\ v + dv) = \bar f(u, v) + f'_u\,du + f'_v\,dv + \varepsilon,$$

hol ε a sorfejtésben fellépő egynél magasabb rendű végtelen kicsi tagokat tartalmazza. Ezen két görbe metszési pontjában

$$\bar r = \bar r_1,$$

vagy $$f'_u\,du + f'_v\,dv = 0,$$

ha a magasabb rendű tagokat elhagyjuk. A feltétel két egyenlőségre bomlik

$$\varphi_1{}'_u\,du + \varphi_1{}'_v\,dv = 0$$

és $$\varphi_2{}'_u\,du + \varphi_2{}'_v\,dv = 0.$$

Mivel du és dv egyszerre nem nulla, a keresett feltétel

$$\begin{vmatrix} \varphi_1{}'_u & \varphi_1{}'_v \\ \varphi_2{}'_u & \varphi_2{}'_v \end{vmatrix} = 0,$$

vagy Donkin jelölése szerint

$$\frac{\partial(\varphi_1\,\varphi_2)}{\partial(u, v)} = 0.\star$$

Ha ezen feltételből akár az u, akár a v értékét kiszámítjuk és az $\bar r = \bar f(u, v)$ egyenletbe helyettesítjük, megkapjuk a burkolt görbe egyenletét a megmaradt változóban kifejezve.

1. Pl. Mi a burkoltja azon a sugarú köröknek, melyeknek centruma az (x) tengelybe esik? Ezen körrendszer egyenlete:

$$\bar r = (v + a\cos u)\,\bar\varepsilon_1 + a\sin u\,\bar\varepsilon_2\,;$$

a keresett feltétel

$$\begin{vmatrix} a\sin u & a\cos u \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ebből $$-a\cos u = 0,$$

$$u = 90°, \text{ vagy } 270°.$$

A két burkolt egyenlete tehát

$$\bar r = v\bar\varepsilon_1 + a\,\bar\varepsilon_2 \text{ és } \bar r = v\bar\varepsilon_1 - a\bar\varepsilon_2.$$

2. Pl. Mi a burkoltja azon a hosszuságú egyenesnek, mely

⋆ A burkoltnak Czuber-féle feltétele. Archiv. f. Math. u. Physik (3) 2. 1902. p. (113—122). — Wieleitner H.: Theorie d. eb. algebr. Kurven. S. Schubert. 1905. p. 49.

úgy mozog, hogy végpontja mindig az (x) és (y) tengelyben marad?* Ezen változó helyzetű egyenes egyenlete

$$\bar{r} = u \cos v \bar{\varepsilon}_1 + (a - u) \sin v \bar{\varepsilon}_2.$$

A burkolt egyenletének feltétele

$$\begin{vmatrix} \cos v & -\sin v \\ -u \sin v & (a-u)\cos v \end{vmatrix} = 0,$$

vagy
$$a \cos^2 v - u \cos^2 v - u \sin^2 v = a \cos^2 v - u = 0,$$
$$u = a \cos^2 v;$$

helyettezve ezen értéket, a burkolt egyenlete lesz

$$\bar{r} = a \cos^3 v \bar{\varepsilon}_1 + a \sin^3 v \bar{\varepsilon}_2,$$

és ez astrois egyenlete.

3. Pl. Mi a burkoltja azon ellipsis-seregnek, melyeknek centruma az origo és tengelyeinek szorzata állandó a^2? Ezen ellipsis-sereg egyenlete

$$\bar{r} = \frac{a^2}{v} \cos u \bar{\varepsilon}_1 + v \sin u \bar{\varepsilon}_2.$$

A burkolt feltételi egyenlete

$$\begin{vmatrix} -\frac{a^2}{v} \sin u & v \cos u \\ -\frac{a^2}{v^2} \cos u & \sin u \end{vmatrix} = 0,$$

ebből:
$$\frac{a^2}{v} \cos^2 u - \frac{a^2}{v} \sin^2 u = 0,$$
$$\cos^2 u = \sin^2 u, \quad tg^2 u = 1$$

tehát
$$u = 45^\circ,\ 135^\circ,\ 225^\circ,\ 315^\circ.$$

A négy burkolt egyenlete

$$\bar{r} = \left(\frac{a^2}{v} \bar{\varepsilon}_1 + v \bar{\varepsilon}_2\right) \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\bar{r} = \left(-\frac{a^2}{v} \bar{\varepsilon}_1 + v \bar{\varepsilon}_2\right) \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\bar{r} = \left(-\frac{a^2}{v} \bar{\varepsilon}_1 - v \bar{\varepsilon}_2\right) \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\bar{r} = \left(\frac{a^2}{v} \bar{\varepsilon}_1 - v \bar{\varepsilon}_2\right) \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Mindegyik burkolt hyperbola, mindegyiknek asymptotája a coordinátarendszer x és y tengelye, a valós tengely hossza mindegyiknél $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

---

* V. Mangoldt H.: Einführung in die höhere Mathematik. Hirzel. Leipzig. 2. Band. 1912. p. 460—461.

18. Scalaris egyenlettel meghatározott görbe.

Az $f(x, y) = 0$ egyenlettel adott síkgörbét úgy tekinthetjük, mint az

$$u = f(x, y)$$

scalaris mezővel értelmezett görbesereg egy görbéjét, mely az $u = 0$ paraméter-értékhez tartozik. Tudjuk, hogy ezen görbesereget merőlegesen szeli az

$$\bar{n} = \operatorname{grad} f(x, y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

vector, tehát ez az adott görbének normalisát is adja, az érintőt pedig

$$\bar{t} = [\operatorname{grad} f \bar{\varepsilon}_3] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

iránya határozza meg.

Kifejtve az (1) és (2) egyenlőséget

$$\bar{n} = \frac{\partial f}{\partial x} \bar{\varepsilon}_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \bar{\varepsilon}_2,$$

$$\bar{t} = \frac{\partial f}{\partial y} \bar{\varepsilon}_1 - \frac{\partial f}{\partial x} \bar{\varepsilon}_2.$$

Ezen kifejezésekből kapjuk az érintő és normalis iránycosinusaira:

$$\frac{1}{\triangle} \frac{\partial f}{\partial y}, \quad -\frac{1}{\triangle} \frac{\partial f}{\partial x},$$

és

$$\frac{1}{\triangle} \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{1}{\triangle} \frac{\partial f}{\partial y};$$

hol

$$\triangle = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = |\operatorname{grad} f|.$$

Hasonlókép a polár-coordinátákban kifejezett $f(\rho, \vartheta) = 0$ görbe úgy tekinthető, mint az

$$u = f(\rho, \vartheta)$$

scalaris mező egy görbéje. Ezen görbének normalisa

$$\bar{n} = \operatorname{grad} f(\rho, \vartheta) = \frac{\partial f}{\partial \rho} \operatorname{grad} \rho + \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \operatorname{grad} \vartheta, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

érintője pedig

$$\bar{t} = [\bar{n} \bar{\varepsilon}_2] = [\operatorname{grad} f(\rho, \vartheta),\ \bar{\varepsilon}_3] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

által adható.

A 9. pont alapján ezeket írhatjuk

$$\bar{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial \rho} \cos \vartheta - \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \frac{\sin \vartheta}{\rho}\right) \bar{\varepsilon}_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial \rho} \sin \vartheta + \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \frac{\cos \vartheta}{\rho}\right) \bar{\varepsilon}_2$$

és

$$\bar{t} = \left(\frac{\partial f}{\partial \rho} \sin \vartheta + \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \frac{\cos \vartheta}{\rho}\right) \bar{\varepsilon}_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial \vartheta} \frac{\sin \vartheta}{\rho} - \frac{\partial f}{\partial \rho} \cos \vartheta\right) \bar{\varepsilon}_2$$

alakban is.

Ezekből kapjuk az érintő és a normalis egységnyi vectorát

$$\bar{\tau} = \frac{\bar{t}}{\triangle} \text{ és } \bar{\nu} = \frac{\bar{n}}{\triangle},$$

hol

$$\triangle = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\right)^2 \frac{1}{\rho^2}}.$$

Az $f(x, y) = 0$ egyenlet esetében a görbületi mértéket a következő módon határozhatjuk meg. A görbe tangensének és normálisának egységnyi vectorai

$$\bar{\tau} = -\frac{i \operatorname{grad} f}{\triangle} \text{ és } \bar{\nu} = \frac{\operatorname{grad} f}{\triangle},$$

a másodikból kapjuk

$$d\bar{\nu} = -\frac{\bar{\tau}}{\rho} ds = \frac{\triangle\, d(\operatorname{grad} f) - \operatorname{grad} f.\, d\triangle}{\triangle^2}.$$

Szorozzuk meg ezen egyenlőség két utóbbi tagját $-\bar{\tau} = \frac{i \operatorname{grad} f}{\triangle}$-val, kapjuk

$$\frac{ds}{\rho} = \frac{i \operatorname{grad} f.\; d(\operatorname{grad} f)}{\triangle^2}.$$

Ezen képlethez szükséges mennyiségek a következők:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{\triangle}{f_2} dx$$

$$i \operatorname{grad} f = -f_2 \bar{\varepsilon}_1 + f_1 \bar{\varepsilon}_2{}^{\star}$$

$$d \operatorname{grad} f = (f_{11} dx + f_{12} dy)\, \bar{\varepsilon}_1 + (f_{12} dx + f_{22} dy)\, \bar{\varepsilon}_2;$$

helyettesítve ezen értékeket és végül $\frac{dy}{dx} = -\frac{f_1}{f_2}$-t téve

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{f_1^2 f_{22} - 2 f_1 f_2 f_{12} + f_2^2 f_{11}}{\triangle^3}.$$

19. Görbesereg trajectoriái.

Ha valamely görbe egyenlete $f(u, v) = 0$ alakban van adva, hol u, v jelenthet akár Descartes-féle, akár polaris, vagy bipolaris stb. coordinátákat, akkor azon görbesereg egyenlete, melyhez az adott görbe tartozik

$$w = f(u, v) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

---

* A következőkben rövidség kedvéért $\frac{\partial f}{\partial x} = f_1, \frac{\partial f}{\partial y} = f_2, \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial x} = f_{11}$ stb. jelölést alkalmazzuk.

lehet, hol w a változó paraméter. Ha P ezen görbesereg pontja, a rajta átmenő görbe normalisának irányát

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial u} \operatorname{grad} u + \frac{\partial f}{\partial v} \operatorname{grad} v,$$

érintőjének irányát pedig

$$- i \operatorname{grad} f = - \frac{\partial f}{\partial u} i \operatorname{grad} u - \frac{\partial f}{\partial v} i \operatorname{grad} v$$

adja.

Határozzuk most meg az (1)-el adott görbesereg ω szög alatt hajló trajectoriáit. Ha ezen trajectoriák egyenlete

$$w_1 = \varphi(u, v) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

akkor áll a következő feltétel

$$e^{i\omega} \operatorname{grad} f = \frac{|\operatorname{grad} f|}{|\operatorname{grad} \varphi|} \operatorname{grad} \varphi, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

a mi annak kifejezése, hogy az (1) és (2) érintői egymással állandóan ω szöget zárnak be. Ha a jobboldali együtthatót l-el jelöljük, írhatjuk a (3) helyett

$$\operatorname{grad} f \cos \omega + i \operatorname{grad} f \sin \omega = l \operatorname{grad} \varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

vagy részletesebben

$$\frac{\partial f}{\partial u} \cos \omega \operatorname{grad} u + \frac{\partial f}{\partial v} \cos \omega \operatorname{grad} v + \frac{\partial f}{\partial u} \sin \omega \, i \operatorname{grad} u +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial v} \sin \omega \, i \operatorname{grad} v = l \frac{\partial \varphi}{\partial u} \operatorname{grad} u + l \frac{\partial \varphi}{\partial v} \operatorname{grad} v \quad \ldots\ldots \quad (4_1)$$

Kifejezve ez egyenlet mindkét oldalát a két alapvectorral, az egész egyenlőség két differentiál-egyenletre bomlik, melyből az l kiküszöbölése után a φ függvényt kell meghatároznunk és constanssal egyenlővé téve megkapjuk a kívánt trajectoriák egyenletét.

A (4)-ből az esetben, ha u és v derékszögű coordináták, kapjuk

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \cos \omega - \frac{\partial f}{\partial y} \sin \omega\right) \bar{\varepsilon}_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \cos \omega + \frac{\partial f}{\partial x} \sin \omega\right) \bar{\varepsilon}_2 = l \frac{\partial \varphi}{\partial x} \bar{\varepsilon}_1 + l \frac{\partial \varphi}{\partial y} \bar{\varepsilon}_2 \quad \ldots \quad (5)$$

ebből a két differentiál-egyenlet

$$\left.\begin{aligned} l \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cos \omega - \frac{\partial f}{\partial y} \sin \omega, \\ l \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial x} \sin \omega + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \omega. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Polár-coordináták esetében, vagyis ha $u = \rho$ és $v = \vartheta$ a 9. pont eredményeinek felhasználásával:

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial \rho}\cos(\omega+\vartheta)-\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\sin(\omega+\vartheta)\right\}\bar{\varepsilon}_1+\left\{\frac{\partial f}{\partial \rho}\sin(\omega+\vartheta)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\cos(\omega+\vartheta)\right\}\bar{\varepsilon}_2=$$

$$=l\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\cos\vartheta-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}\sin\vartheta\right\}\bar{\varepsilon}_1+l\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\sin\vartheta+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}\cos\vartheta\right\}\bar{\varepsilon}_2\;.\;.\;(7)$$

Ebből könnyű felírni a trajectoriák differentiál-egyenletét.

Derékszögű trajectoriák esetében, vagyis ha $\omega=\frac{\pi}{2}$, kapjuk a (4), (5) és (7) egyenletekből

$$\frac{\partial f}{\partial u}i\,\mathrm{grad}\,u+\frac{\partial f}{\partial v}i\,\mathrm{grad}\,v=l\frac{\partial \varphi}{\partial u}\mathrm{grad}\,u+l\frac{\partial \varphi}{\partial v}\mathrm{grad}\,v\;.\;.\;.\;(4_1)$$

$$-\frac{\partial f}{\partial y}\bar{\varepsilon}_1+\frac{\partial f}{\partial x}\bar{\varepsilon}_2=l\frac{\partial \varphi}{\partial x}\bar{\varepsilon}_1+l\frac{\partial \varphi}{\partial y}\bar{\varepsilon}_2\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(5_1)$$

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial \rho}\sin\vartheta-\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\cos\vartheta\right)\bar{\varepsilon}_1+\left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\cos\vartheta-\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\sin\vartheta\right)\bar{\varepsilon}_2=$$

$$=l\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\cos\vartheta-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}\sin\vartheta\right)\bar{\varepsilon}_1+l\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\sin\vartheta+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}\cos\vartheta\right)\bar{\varepsilon}_2.\;\;(7_1)$$

A görberendszer trajectoriáinak kezelésében sokszor a vector-egyenlet szétbontása nélkül is czélt érhetünk.* A (3) egyenletből ugyanis lesz.

$$e^{i\omega}\,\mathrm{grad}\,f=l\,\mathrm{grad}\,\varphi.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(8)$$

Ha ezen összefüggésből meg tudjuk határozni a φ függvényt, akkor $\varphi=\mathrm{const.}$ a kivánt trajectoriák egyenlete.

Példák. 1. Keressük az $y=ax^n$ parabolasereg derékszögű trajectoriáit. Ez esetben $a=\frac{y}{x^n}$ és így

$$\mathrm{grad}\,a=\frac{1}{x^n}\,\mathrm{grad}\,y-\frac{ny}{x^{n+1}}\,\mathrm{grad}\,x$$

és ebből, mivel $i\,\mathrm{grad}\,x=\mathrm{grad}\,y$ és $i\,\mathrm{grad}\,y=-\mathrm{grad}\,x$, kapjuk

$$i\,\mathrm{grad}\,a=-\frac{1}{x^{n+1}}(x\,\mathrm{grad}\,x+ny\,\mathrm{grad}\,y)=-\frac{1}{2x^{n+1}}\,\mathrm{grad}\,(x^2+ny^2),$$

a derékszögű trajectoriák egyenlete tehát

$$x^2+ny^2=C,$$

a mely $n>0$ esetében homothetikus ellipsisek egyenlete, $n<0$ esetében pedig hyperboláké.

---

* Burali—Forti—Marcolongo... Éléments de calcul vectoriel... Paris. 1910. p. 80.

2. Keressük a sugárnyaláb ω-szögű trajectoriáit. A sugárnyaláb egyenlete $\vartheta = a$, hol a a változó paraméter, ebből a trajectoriákra kapjuk

$$e^{i\omega} \operatorname{grad} a = \cos\omega \operatorname{grad} \vartheta + \sin\omega \, i \operatorname{grad} \vartheta$$

helyettesítve a 9. pontból $i \operatorname{grad} \vartheta = -\frac{\operatorname{grad} \rho}{\rho}$ értékét, kapjuk

$$e^{i\omega} \operatorname{grad} a = \sin\omega \left(\operatorname{ctg}\omega . \operatorname{grad} \vartheta - \frac{\operatorname{grad} \rho}{\rho} \right) = \sin\omega \operatorname{grad} (\operatorname{ctg}\omega . \vartheta - \log\rho);$$

ebből az ω szögű trajectoriák egyenlete

$$\vartheta \operatorname{ctg}\omega - \log\rho = \log C$$

és így
$$\rho = \mathrm{K} \, e^{\vartheta \operatorname{ctg}\omega},$$

a mi logarithmikus spiralisok egyenletét adja.

3. Keressük az $\rho^n = a^n \sin n\vartheta$ görbesereg derékszögű trajectoriáit. A görbesereg egyenletéből

$$\operatorname{grad} a^n = \frac{n \rho^{n-1} \sin n\vartheta \operatorname{grad} \rho - n\rho^n \cos n\vartheta \operatorname{grad} \vartheta}{\sin^2 n\vartheta};$$

ha tekintetbe veszszük az $i \operatorname{grad} \rho = \rho \operatorname{grad} \vartheta$ és $i \operatorname{grad} \vartheta = -\frac{\operatorname{grad} \rho}{\rho}$ egyenlőségeket, kapjuk

$$i \operatorname{grad} a^n = \frac{n\rho^n \sin n\vartheta \operatorname{grad} \vartheta + n\rho^{n-1} \cos n\vartheta \operatorname{grad} \rho}{\sin^2 n\vartheta} =$$

$$= \operatorname{ctg}^2 n\vartheta \frac{\cos n\vartheta \operatorname{grad} \rho^n - \rho^n \operatorname{grad} \cos n\vartheta}{\cos^2 n\vartheta} =$$

$$= \operatorname{ctg}^2 n\vartheta \operatorname{grad} \frac{\rho^n}{\cos n\vartheta}.$$

A derékszögű trajectoriák egyenlete tehát

$$\rho^n = c^n \cos n\vartheta = c^n \sin n \left(\frac{\pi}{2n} + \vartheta \right).$$

Az új görbesereg tehát a régiből úgy keletkezett, hogy az egész rendszert az origo körül $\frac{\pi}{2n}$ szöggel elforgattuk.

II. FEJEZET.

A térgörbék elmélete.

20. A tangens.

Legyen valamely térbeli görbe vectoregyenlete

$$\bar{r} = \bar{f}(u) = \varphi_1(u)\bar{\varepsilon}_1 + \varphi_2(u)\bar{\varepsilon}_2 + \varphi_3(u)\bar{\varepsilon}_3 \ldots\ldots \quad (1)$$

Vizsgáljuk a görbét az u által meghatározott P pont szomszédságában a P_1-ben, hol a paraméter $u + \triangle u$. A vector ezen pontban

$$\bar{r} + \triangle\bar{r} = \bar{f}(u + \triangle u),$$

hol $\triangle\bar{r} = \overline{PP_1}$ húrral, a melynek absolut értékéből a limesen az ívelem lesz, tehát

$$|d\bar{r}| = ds =$$

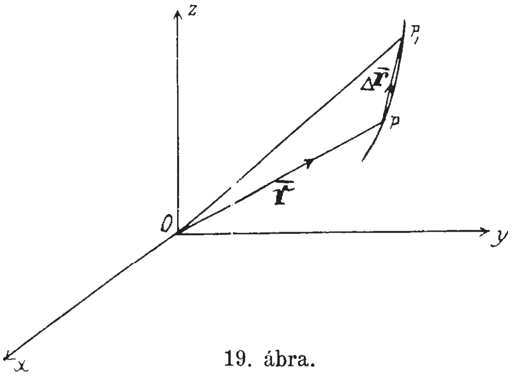
$$= |\varphi_1'\bar{\varepsilon}_1 + \varphi_2'\bar{\varepsilon}_2 + \varphi_3'\bar{\varepsilon}_3|\,du$$

és így

$$ds = \sqrt{\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2 + \varphi_3'^2}\,du$$

$$s' = \sqrt{\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2 + \varphi_3'^2},$$

ha az u szerinti differentiálást a szokott rövidítéssel jelöljük.



19. ábra.

Az előbbi két egyenletből

$$\triangle\bar{r} = \bar{f}(u + \triangle u) - \bar{f}(u).$$

Ha ezen egyenletet elosztjuk $|\triangle\bar{r}|$-el, kapunk a PP_1 húr irányát jelző egységnyi vectort, melynek limese az érintő irányát adja, mit $\bar{\tau}$-val jelölünk és így

$$\bar{\tau} = \lim\frac{\triangle\bar{r}}{|\triangle\bar{r}|} = \frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{\varphi_1'}{s'}\bar{\varepsilon}_1 + \frac{\varphi_2'}{s'}\bar{\varepsilon}_2 + \frac{\varphi_3'}{s'}\bar{\varepsilon}_3 = \frac{\bar{r}'}{s'} \qquad (2)$$

Ha a $\bar{\tau}$ vector kezdőpontja az origo, akkor a (2) a görbe érintőinek *gömbi képét* szolgáltatja, vagyis azon gömbi görbét, mely keletkezik, ha az origo körül egységgel gömböt irunk le és ezt metszük az origóból kiinduló és az érintőkkel párhuzamos egyenesekkel.

A görbe $P(u)$ pontjához tartozó érintő egyenlete

$$Q = P + \bar{\tau}v =$$

$$= O + \left(\varphi_1 + \frac{\varphi_1'}{s'}v\right)\bar{\varepsilon}_1 + \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_2'}{s'}v\right)\bar{\varepsilon}_2 + \left(\varphi_3 + \frac{\varphi_3'}{s'}v\right)\bar{\varepsilon}_3$$

lesz, ha benne csak v a változó és u állandó. Ha ellenben ezen egyenletben az u és v változók, akkor a Q a görbe érintői által beburkolt vonalfelület egyenlete. Ezen felületet *lefejthető felületnek* nevezzük.* Ha pedig a tangens egyenletében a v-nek constans a értéket adunk, akkor oly görbét kapunk, mely úgy keletkezik az eredetiből, hogy az érintési pontból kiindulva, az érintőre állandó a távolságot mérünk.

21. A főnormalis és a görbület.

Vizsgáljuk most az érintő irányának, $\bar{\tau}$-nak az ívelem szerint vett változását:

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{d\bar{\tau}}{du} : \frac{ds}{du} = \frac{s'\,\bar{r}'' - \bar{r}'\,s''}{s'^3}, \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (1)$$

ebből

$$d\bar{\tau} = \frac{s'\,\bar{r}'' - s''\,\bar{r}'}{s'^2}\,du, \quad \bar{\tau}' = \frac{s'\,\bar{r}'' - s''\,\bar{r}'}{s'^2}.$$

Ha ezen irányváltozás egységnyi vectorát $\bar{\nu}$-vel jelöljük

$$d\bar{\tau} = \bar{\nu}\,|\,d\bar{\tau}\,|.$$

Így kapunk a görbe P pontjához tartozó új irányt

$$\bar{\nu} = \frac{d\bar{\tau}}{|\,d\bar{\tau}\,|},$$

mit a görbe *főnormalisának* mondunk.

Szorozzuk meg ezen irányt scalarisan a $\bar{\tau}$-val,

$$(\bar{\tau}\bar{\nu}) = \frac{1}{|d\bar{\tau}|}(\bar{\tau}\,d\bar{\tau}) = \frac{1}{|d\bar{\tau}|}\frac{1}{2}\,d\,(\bar{\tau}\bar{\tau}) = 0,$$

mert $(\bar{\tau}\bar{\tau}) = 1$. Ebből láthatjuk, hogy a görbe főnormalisa merőleges a tangensre.

Ezek után írhatjuk

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{\bar{\nu}}{\rho_1},$$

hol ρ_1 bizonyos függvénye az u-nak és a P-hez tartozó *görbületi sugárnak*, $\dfrac{1}{\rho_1}$-et pedig *görbületnek* nevezzük. Ha ezen egyenlőséget scalarisan négyzetre emeljük

$$\frac{1}{\rho_1{}^2} = \frac{\bar{\tau}'^2}{s'^2} = \frac{s'^2\,(\bar{r}'')^2 + s''^2\,(\bar{r}')^2 - 2s'\,s''\,(\bar{r}'\,\bar{r}'')}{s'^6}.$$

---

* Kommerell V. u. K.: Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen. Samml. Schubert. I. B. 2. Aufl. 1909. p. 44.

Ezen kifejezést egyszerűsíthetjük. Az előző pont (2) egyenlete alapján ugyanis írható

$$\bar{r}' = \bar{\tau} s',$$
$$\bar{r}'' = \bar{\tau}' s' + \bar{\tau} s'',$$

ezekből $(\bar{r}' \bar{r}'') = s' s''$.

Továbbá

$$(\bar{r}'')^2 = \varphi_1''^2 + \varphi_2''^2 + \varphi_3''^2$$

és

$$(\bar{r}'^2) = \varphi_1'^2 + \varphi_2'^2 + \varphi_3'^2 = s'^2,$$

tehát

$$\frac{1}{\rho_1^2} = \frac{\varphi_1''^2 + \varphi_2''^2 + \varphi_3''^2 - s''^2}{s'^4}.\star$$

A P ponttól a $\bar{\nu}$ irányában lévő ρ_1 távolságban lévő M pontot a P ponthoz tartozó *görbületi középpontnak* nevezzük. Ezen görbületi középpont mértani helyének egyenlete

$$M = P + \bar{\nu}\rho_1 = O + \bar{f}(u) + \rho_1^2 \frac{\bar{\tau}'}{s'}.$$

A görbe P pontjához tartozó normalis egyenlete pedig

$$Q = P + v\bar{\nu} = O + \bar{f}(u) + v\bar{\nu},$$

ha csak v a változó. Ha pedig az u és v együtt változik, akkor a Q a főnormalisok által beburkolt felület egyenlete lesz.

22. A binormalis és a torsio.

A görbe tangense és főnormalisa segítségével még egy főirányt határozhatunk meg, mely reájuk merőleges és oly irányú, hogy a tangens, főnormalis és ezen új irány, mit *binormalisnak* mondunk, jobb sodrású coordinata-rendszernek feleljen meg. Ha ezen irányt a $\bar{\beta}$ egységnyi vectorral jelöljük, akkor, mivel $\bar{\tau}$ és $\bar{\nu}$ egymásra merőleges

$$\bar{\beta} = [\bar{\tau}\,\bar{\nu}] = \frac{\rho_1}{s'}[\bar{\tau}\,\bar{\tau}'] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

A binormalis meghatározásából következik a

$$\bar{\beta}^2 = 1 \quad \text{és} \quad \bar{\beta}\bar{\tau} = 0$$

egyenlőség. Mindkettőt differentiálva s szerint

$$\bar{\beta}\frac{d\bar{\beta}}{ds} = 0 \quad \text{és} \quad \bar{\tau}\frac{d\bar{\beta}}{ds} + \bar{\beta}\frac{d\bar{\tau}}{ds} = 0$$

---

* L. pl. Kommerell V. u. K.: Allgem. Theorie d. Raumkurven u. Flächen. Samml. Schubert. I. B. 2. Aufl. 1909. p. 13.

egyenlőségekre jutunk. Figyelembe véve a $\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{\bar{\nu}}{\rho_1}$ és $\bar{\beta}\bar{\nu} = 0$ egyenlőségeket a másodikból egyszerűen

$$\bar{\tau}\frac{d\bar{\beta}}{ds} = 0$$

marad. A $\frac{d\bar{\beta}}{ds}$ tehát merőleges a $\bar{\beta}$-ra és $\bar{\tau}$-ra, következőleg egybeesik a főnormalis irányával és ha absolut értékét

$\left|\frac{d\bar{\beta}}{ds}\right| = \frac{1}{\rho_2}$-vel jelöljük, írhatjuk

$$\frac{d\bar{\beta}}{ds} = \frac{\bar{\nu}}{\rho_2} \text{. . . . .} \quad (2)$$

Ezen kifejezésben a ρ_2-t a görbe P pontjához tartozó *torsio-sugárnak*, $\frac{1}{\rho_2}$-t pedig *torsio*-nak nevezzük.

Szorozzuk meg a (2) egyenletet scalarisan a $\bar{\nu}$-vel, kapjuk

$$\frac{1}{\rho_2} = \bar{\nu}\frac{d\bar{\beta}}{ds}.$$

Az (1) egyenletből pedig

$$\frac{d\bar{\beta}}{ds} = \left[\frac{d\bar{\tau}}{ds}\bar{\nu}\right] + \left[\bar{\tau}\frac{d\bar{\nu}}{ds}\right],$$

és így

$$\frac{1}{\rho_2} = \bar{\nu}\left[\frac{d\bar{\tau}}{ds}\bar{\nu}\right] + \bar{\nu}\left[\bar{\tau}\frac{d\bar{\nu}}{ds}\right].$$

A jobboldali mindkét tagra alkalmazzuk a térfogatszabályt (6. pont 1.) és $\bar{\nu} = \rho_1\frac{d\bar{\tau}}{ds}$ és $\frac{d\bar{\nu}}{ds} = \frac{d\rho_1}{ds}\frac{d\bar{\tau}}{ds} + \rho_1\frac{d^2\bar{\tau}}{ds^2}$ helyettesítjük, kapjuk

$$\frac{1}{\rho_2} = \bar{\tau}\left[\frac{d\rho_1}{ds}\frac{d\bar{\tau}}{ds} + \rho_1\frac{d^2\bar{\tau}}{ds^2}, \rho_1\frac{d\bar{\tau}}{ds}\right] =$$

$$= \rho_1{}^2\,\bar{\tau}\left[\frac{d^2\bar{\tau}}{ds^2}, \frac{d\bar{\tau}}{ds}\right] = -\rho_1{}^2\,\bar{\tau}\left[\frac{d\bar{\tau}}{ds}, \frac{d^2\bar{\tau}}{ds^2}\right].$$

Ha ezen kifejezésben az egyes vectorok derékszögű componenseit ismerjük, akkor $\frac{1}{\rho_1}$ értékét a 6. pont I. alapján determináns alakjában írhatjuk. Kiszámítva a megfelelő értékeket

$$\bar{\tau} = \frac{\bar{r}'}{s'},$$

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{s'\bar{r}'' - \bar{r}'s''}{s'^3} = \frac{\bar{r}''}{s'^2} - \frac{s''}{s'^3}\bar{r}',$$

$$\frac{d^2\bar{\tau}}{ds^2} = \frac{\bar{r}'''}{s'^3} - \frac{3s''}{s'^4}\bar{r}'' + \frac{3s''^2 - s's'''}{s'^5}\bar{r}'.$$

Ezek helyettesítése és kellő egyszerüsítés után kapjuk

$$\frac{1}{\rho_2} = -\rho_1{}^2 \frac{\bar{r}'}{s'} \left[\frac{\bar{r}''}{s'^2} \frac{\bar{r}'''}{s'^3}\right] = -\frac{\rho_1{}^2}{s'^6} \begin{vmatrix} \varphi_1{}' & \varphi_2{}' & \varphi_3{}' \\ \varphi_1{}'' & \varphi_2{}'' & \varphi_3{}'' \\ \varphi_1{}''' & \varphi_2{}''' & \varphi_3{}''' \end{vmatrix}$$ *

23. A görbe egyenletének differentiál-formái.

A görbe P pontjához tartozó érintő, főnormalis és binormalis derékszögű triedert határoz meg. A trieder éleit jelző egységnyi vectorok között az előzők alapján a következő összefüggések állanak fenn:

$$\bar{\tau} = [\bar{\nu}\,\bar{\beta}], \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\bar{\nu} = [\bar{\beta}\,\bar{\tau}], \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\bar{\beta} = [\bar{\tau}\,\bar{\nu}]. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

A tangens és binormalis vectorának az ívelem szerint vett differentiálhányadosára az előző két pontban találtuk

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{\bar{\nu}}{\rho_1}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

és

$$\frac{d\bar{\beta}}{ds} = \frac{\bar{\nu}}{\rho_2}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

A (2) formulát differentiálva az s szerint és felhasználva a (4) és (5) eredményeit kapjuk

$$\frac{d\bar{\nu}}{ds} = \frac{1}{\rho_2}[\bar{\nu}\,\bar{\tau}] + \frac{1}{\rho_1}[\bar{\beta}\,\bar{\nu}]$$

és ebből az (1) és (3) alapján

$$\frac{d\bar{\nu}}{ds} = -\frac{\bar{\tau}}{\rho_1} - \frac{\bar{\beta}}{\rho_2}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

A három főirány differentiálhányadosai között fennálló (4), (5) és (6) egyenletek a *Frenet-féle formulák* neve alatt ismeretesek.

A következőkben még pár, könnyen levezethető differentiál-összefüggéseket fogunk felírni.** Az előzők alapján

$$\left.\begin{aligned} \bar{r}' &= s'\,\bar{\tau} \\ \bar{r}'' &= s''\,\bar{\tau} + \frac{s'^2}{\rho_1}\,\bar{\nu} \\ \bar{r}''' &= \left(s''' - \frac{s'^3}{\rho_1{}^2}\right)\bar{\tau} + \left\{\frac{s'\,s''}{\rho_1} + \left(\frac{s'^2}{\rho_1}\right)'\right\}\bar{\nu} - \frac{s'^3}{\rho_1\,\rho_2}\,\bar{\beta} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (7)$$

---

* Kommerell V. u. K.: Allg. Th. d. Raumkurven und Flächen. Samml. Schubert. I. B. 2. Aufl. 1909. p. 23.

** Burali-Forti C., Marcolongo R., Lattès S.: Éléments de calcul vectoriel... Paris. Hermann. 1910. p. 88.

$$\left.\begin{aligned}\bar{\tau}' &= \frac{s'}{\rho_1}\bar{\nu}\\ \bar{\tau}'' &= \left(\frac{s'}{\rho_1}\right)'\bar{\nu} - \frac{s'^2}{\rho_1^2}\bar{\tau} - \frac{s'^2}{\rho_1\rho_2}\bar{\beta}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ (8)$$

$$\left.\begin{aligned}\bar{\nu}' &= -\frac{s'}{\rho_1}\bar{\tau} - \frac{s'}{\rho_2}\bar{\beta}\\ \bar{\nu}'' &= -\left(\frac{s'}{\rho_1}\right)'\bar{\tau} - \left(\frac{s'}{\rho_2}\right)'\bar{\beta} - \frac{s'^2}{\rho_1^2}\bar{\nu} - \frac{s'^2}{\rho_2^2}\bar{\nu}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ (9)$$

$$\left.\begin{aligned}\bar{\beta}' &= \frac{s'}{\rho_2}\bar{\nu}\\ \bar{\beta}'' &= \left(\frac{s'}{\rho_2}\right)'\bar{\nu} - \frac{s'^2}{\rho_1\rho_2}\bar{\tau} - \frac{s'^2}{\rho_2^2}\bar{\beta}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ (10)$$

Ezen kifejezésekből könnyen adódnak a következő képletek:

$$[\bar{r}'\bar{r}''] = \frac{s'^3}{\rho_1}\bar{\beta}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (11)$$

$$\left[\bar{r}'[\bar{r}'\bar{r}'']\right] = \frac{s'^4}{\rho_1}[\bar{\tau}\bar{\beta}] = -\frac{s'^4}{\rho_1}\bar{\nu}\ \ldots\ldots\ldots\ (12)$$

A (7), (11) és (12) alapján látható, hogy a görbe P pontjához tartozó triéder éleit, vagyis az érintő, főnormalis és binormalis irányát a

$$\bar{t} = \bar{r}',\quad \bar{n} = \left[\bar{r}'[\bar{r}'\bar{r}'']\right]\quad \text{és}\quad \bar{b} = [\bar{r}'\bar{r}'']\ \ldots\ldots\ (13)$$

vectorokkal is megadhatjuk. Ezek azonban általában nem lesznek egységnyi vectorok, hanem az absolut értékükre áll

$$t = s',\quad n = \frac{s'^4}{\rho_1},\quad b = \frac{s'^3}{\rho_1}.$$

A (13) alapján új formában írhatjuk fel a P ponthoz tartozó triéder éleinek és oldalainak egyenletét. Ha Q változó pontot jelent, akkor az érintő, főnormalis és binormalis egyenlete írható

$$[Q-P,\ \bar{r}'] = 0,$$
$$\left[Q-P,\ \left[\bar{r}'[\bar{r}'\bar{r}'']\right]\right] = 0,$$
$$\left[Q-P,\ [\bar{r}'\bar{r}'']\right] = 0.$$

Ennek megfelelően a normalis sík, a rectificáló és simuló sík egyenlete

$$(Q-P,\ \bar{r}') = 0,$$
$$\left(Q-P,\ \left[\bar{r}'[\bar{r}'\bar{r}'']\right]\right) = 0,$$
$$\left(Q-P,\ [\bar{r}'\bar{r}'']\right) = 0.$$

A (8), (9) és (10) formulákból további érdekes összefüggés a következő:

$$\bar{\nu}\,\bar{\nu}'' = \bar{\tau}\bar{\tau}'' + \bar{\beta}\bar{\beta}''.$$

A (11) formulából kaphatjuk továbbá:

$$\bar{r}'''\,[\bar{r}'\,\bar{r}''] = -\frac{s'^6}{\rho_1{}^2\,\rho_2}.$$

Ebből és a (11)-ből könnyen felírhatjuk a görbületet és a torsiót:

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{|\,[\bar{r}'\,\bar{r}'']\,|}{|\,\bar{r}'\,|^3}$$

$$\frac{1}{\rho_2} = -\frac{\bar{r}'''\,[\bar{r}'\,\bar{r}'']}{|\,[\bar{r}'\,\bar{r}'']\,|^2}.$$

24. A térgörbéhez tartozó lefejthető felületek.*

A térgörbe minden pontjához tartozik oly triéder, melyet az érintő, a főnormalis és a binormalis határoz meg. Ezen triéder oldalai, a normalis sík, a rectificáló és a simuló sík a görbe mentén végigcsúsztatva, egy-egy lefejthető felületet határoz meg. Vizsgáljuk ezen felületek egyenletét.

1. A görbe pontjaihoz tartozó *normalis síkok* a görbe *polaris felületét* burkolják be. A normalis sík egyenlete

$$Q = O + \bar{r} + v\,\bar{\nu} + w\,\bar{\beta}. \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (1)$$

Ennek változása a görbe íveleme szerint

$$\frac{dQ}{ds} = \bar{\tau} - \frac{v}{\rho_1}\,\bar{\tau} - \frac{w}{\rho_2}\bar{\beta} + \frac{v}{\rho_2}\,\bar{\nu}.$$

Két szomszédos normalis sík metszővonala adja a polaris felület alkotóját. A szomszédos normalis sík egyenlete

$$Q_1 = Q + \left(\bar{\tau} - \frac{v}{\rho_1}\,\bar{\tau} - \frac{w}{\rho_2}\,\bar{\beta} + \frac{v}{\rho_2}\,\bar{\nu}\right) ds + \;.\;.\;.\;.\;. \quad (2)$$

Az (1) és (2) sík közös pontjait a következő meggondolással állapíthatjuk meg. Midőn a térgörbe egyik P pontjából átmegyünk a szomszédos P_1 pontba, akkor az előzőhöz tartozó normalis sík (Q) is átmegy (Q_1)-be. Ezenközben a (Q) pontjai általában változtatták a helyüket és pedig a $\bar{\tau}$, $\bar{\nu}$ és $\bar{\beta}$ mentén. Mivel $\bar{\tau}$ merőleges a (Q)-ra, azon pontok, melyek a (Q) mozgásánál helyükön maradnak, csak olyanok lehetnek, melyeknek nincs változásuk a $\bar{\tau}$

---

* Kommerell V. u. K.: Allgem. Theorie der Raumkurven u. Flächen. I. B. 2. Aufl. 1909. p. 44.

mentén. A két szomszédos normalis sík metszéspontjaira nézve tehát a (2) alapján

$$1-\frac{v}{\rho_1}=0, \quad v=\rho_1$$

és így az alkotó, illetőleg változó u mellett a lefejthető polaris felület egyenlete

$$Q=O+\bar{r}+\rho_1\bar{\nu}+w\bar{\beta}. \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (3)$$

Látható, hogy az alkotók a binormalissal párhuzamosak és a görbületi középponton mennek keresztül.

Az alkotók egyenletéből kiszámíthatjuk az oromvonal egyenletét is, a mely a szomszédos alkotók metszéspontjainak mértani helye. A (3) alapján a szomszédos alkotó egyenlete, ha csak elsőrendű végtelen kicsiket veszünk figyelembe

$$Q_1=Q+dQ=Q+\left(\frac{d\rho_1}{ds}\bar{\nu}+w\frac{\bar{\nu}}{\rho_2}--\frac{\rho_1}{\rho_2}\bar{\beta}\right)ds.$$

Közös pontokban nincs változás a főnormalis mentén, tehát

$$\frac{d\rho_1}{ds}+\frac{w}{\rho_2}=0,$$

honnan

$$w=-\frac{d\rho_1}{ds}\rho_2$$

és így

$$Q=O+\bar{r}+\rho_1\bar{\nu}-\rho_2\frac{d\rho_1}{ds}\bar{\beta} \; \ldots\ldots\ldots \; (4)$$

az oromvonal egyenlete, ha benne u a változó.

Állandó u mellett a (4) azon pont egyenletét szolgáltatja, a mely felé a görbén felvett három szomszédos pont normalis síkjának metszéspontja közeledik, ha a görbe három pontját egybeejtjük. Ez esetben a Q egyforma távolságban van a görbe három pontjától és mint ilyen, középpontja oly gömbnek, mely a térgörbe három szomszédos pontján megy át. Ezen gömböt *simuló gömbnek* nevezzük és így (4) változó u mellett a simuló gömbök középpontjának mértani helye. A simuló gömb sugara ugyancsak a (4)-ből

$$R'={\rho_1}^2+{\rho_2}^2\left(\frac{d\rho_1}{ds}\right)^2.$$

2. A *rectificáló síkok* burkoltjánál

$$Q=O+\bar{r}+v\bar{\tau}+w\bar{\beta},$$

$$\frac{dQ}{ds}=\bar{\tau}+\frac{v}{\rho_1}\bar{\nu}+\frac{w}{\rho_2}\bar{\nu}.$$

Két szomszédos sík közös pontjaiban nincs változás a főnormalis mentén, tehát

$$\frac{v}{\rho_1}+\frac{w}{\rho_2}=0.$$

Az alkotó, illetőleg a burkolt felület egyenlete tehát

$$Q=O+\bar{r}+v\bar{\tau}-\frac{\rho_2}{\rho_1}v\bar{\beta}. \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Az oromvonal meghatározása végett vizsgáljuk az alkotó változását az (5)-ből

$$\frac{dQ}{ds}=\bar{\tau}-\frac{\rho_1\frac{d\rho_2}{ds}-\rho_2\frac{d\rho_1}{ds}}{\rho_1{}^2}v\bar{\beta},$$

mint látjuk, ennek nincs változása a főnormalis mentén. Vizsgáljuk tehát a $\frac{d^2 Q}{ds^2}$ értékét. Ha ennek a főnormalis mentén eső változása eltünik, kapjuk meg a szomszédos alkotók metszéspontját, tehát

$$\frac{\bar{\nu}}{\rho_1}-\frac{\rho_1\frac{d\rho_2}{ds}-\rho_2\frac{d\rho_1}{ds}}{\rho_1{}^2\rho_2}v\bar{\nu}=0,$$

ebből

$$v=\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1\frac{d\rho_2}{ds}-\rho_2\frac{d\rho_1}{ds}}$$

és a keresett oromvonal

$$Q=O+\bar{r}+\frac{\rho_2}{\rho_1\frac{d\rho_2}{ds}-\rho_2\frac{d\rho_1}{ds}}(\rho_1\bar{\tau}-\rho_2\bar{\beta}). \ldots\ldots (6)$$

3. Végül a *simuló síkok* egyenlete

$$Q=O+\bar{r}+v\bar{\tau}+w\bar{\nu}.$$

Ennek változása

$$\frac{dQ}{ds}=\bar{\tau}+v\frac{\bar{\nu}}{\rho_1}-w\frac{\bar{\tau}}{\rho_1}-w\frac{\bar{\beta}}{\rho_2}.$$

A binormalis mentén nincs változás, ha

$$w=0,$$

tehát az alkotók egyenlete

$$Q=O+\bar{r}+v\bar{\tau}$$

a tangenseket adja. Az oromvonalnál

$$\frac{dQ}{ds}=\bar{\tau}+\frac{v}{\rho_1}\bar{\nu},$$

a normalis mentén nincs változás, ha $v=0$ és így az oromvonal

$$Q=O+\bar{r}$$

maga a görbe.

25. Evolvens és evoluta.*

Az $\bar{r} = \bar{f}(u)$ görbe *evolvensének* nevezzük azon görbét, mely az $\bar{r}$ görbe érintőit derékszög alatt metszi.

Ha Q pontja az $\bar{r}$ evolvensének, akkor

$$Q = O + \bar{r} + \varphi\,\bar{\tau}.$$

Ezen egyenletben a φ-t úgy kell választanunk, hogy az új görbe érintője merőleges legyen $\bar{\tau}$-ra, tehát, ha az $\bar{r}$ görbe íveleme a független változó, akkor

$$\frac{dQ}{ds}\cdot\bar{\tau} = \left(\bar{\tau} + \frac{d\varphi}{ds}\,\bar{\tau} + \varphi\,\frac{\bar{\nu}}{\rho_1}\right)\bar{\tau} = 1 + \frac{d\varphi}{ds} = 0,$$

ebből

$$\varphi = -s + c,$$

hol c tetszésszerinti állandó. Bármely görbének tehát végtelen sok evolvense van és ezek egyenlete

$$Q = O + \bar{r} + (c - s)\,\bar{\tau}. \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (1)$$

Az $\bar{r} = \bar{f}(u)$ *evolutájának* pedig az oly görbét nevezzük, melynek $\bar{r}$ az evolvense.

Ha tehát Q az $\bar{r}$ evolutájának egy pontja, akkor Q az $\bar{r}$ normális síkjában fekszik és a Q érintője egybeesik az $\bar{r}$ egyik normálisával $\bar{n}$-el. Ha ezen $\bar{n}$ normális ω szöget zár be az $\bar{r}$ görbe főnormálisával, akkor

$$\bar{n} = \cos\omega\,.\,\bar{\nu} + \sin\omega\,\bar{\beta}$$

és így

$$Q = O + \bar{r} + \varphi\bar{n},$$

hol φ és ω az $\bar{r}$ görbe ívének még ismeretlen függvényei. Annak feltétele már most, hogy a Q evoluta legyen

$$\left[\frac{dQ}{ds}\,.\,\bar{n}\right] = \left[\bar{\tau} + \frac{d\varphi}{ds}\,\bar{n} + \varphi\,\frac{d\bar{n}}{ds}\,,\,\bar{n}\right] =$$

$$= \left[\bar{\tau} + \varphi\,\frac{d\bar{n}}{ds},\,\bar{n}\right] = 0. \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (2)$$

A Frenet-féle formulák felhasználásával kapjuk

$$\bar{\tau} + \varphi\,\frac{d\bar{n}}{ds} = \left(1 - \varphi\,\frac{\cos\omega}{\rho_1}\right)\bar{\tau} + \varphi\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{d\omega}{ds}\right)(\sin\omega\,\bar{\nu} - \cos\omega\,\bar{\beta}).$$

A (2) feltételből tehát ered

$$\varphi\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{d\omega}{ds}\right)\bar{\tau} + \left(1 - \varphi\,\frac{\cos\omega}{\rho_1}\right)(\cos\omega\,\bar{\nu} - \sin\omega\,\bar{\beta}) = 0.$$

Ezen egyenlőség azonban csak akkor állhat fenn, ha

---

* Burali-Forti C.—Marcolongo R.—Lattès S.: Éléments de calcul vectoriel. 1910. p. 92.

$$\frac{1}{\rho_2}-\frac{d\omega}{ds}=0 \text{ és } 1-\varphi\frac{\cos\omega}{\rho_1}=0.$$

Kapjuk tehát

$$\omega=\int\frac{ds}{\rho_2}+\omega_0 \text{ és } \varphi=\frac{\rho_1}{\cos\omega}$$

és így az evoluta egyenlete

$$Q=O+\bar{r}+\rho_1\bar{\nu}+\rho_1\, tg\,\omega\,\bar{\beta}$$

Azon esetben, ha $\bar{r}=\bar{f}(u)$ síkgörbe, $\frac{1}{\rho_2}=0$ és $\bar{\beta}=\bar{\varepsilon}_3$, egyúttal tehát $\omega=\omega_0$ állandó és így az evoluta

$$Q=O+\bar{r}+\rho_1\bar{\nu}+\rho_1\, tg\,\omega_0\,\bar{\varepsilon}_3,$$

ha ezen egyenletben $\omega_0=0$, kapjuk a síkgörbe görbületi középpontjainak mértani helyét. Minden más esetben az evoluta oly hengerfelületen fekszik, melynek alkotói a síkra merőlegesek, alapvonala vagy irányvonala pedig a görbületi középpontok mértani helye. Ezen esetben az evoluta érintője párhuzamos a

$$\bar{\nu}+tg\,\omega_0\,\bar{\varepsilon}_3$$

vectorral, ugyanis

$$\frac{dQ}{ds}=\frac{d\rho_1}{ds}(\bar{\nu}+tg\,\omega_0\,\bar{\varepsilon}_3).$$

Ebből pedig következik, mivel

$$(\bar{\nu}+tg\,\omega_0\,\bar{\varepsilon}_3)\,\bar{\varepsilon}_3=tg\,\omega_0=\text{const},$$

hogy az evoluta érintője állandó szöget zár be a henger alkotójával, tehát csavarvonal.

26. A nabla-művelet alkalmazása.

A 10. pont (2) és (5) egyenlőségének összeadásából kapjuk ezen összefüggést

$$\text{grad}(\bar{a}\bar{b})+\text{rot}[\bar{a}\bar{b}]=2(\bar{b}\nabla)\bar{a}+\bar{a}\,\text{div}\,\bar{b}-\bar{b}\,\text{div}\,\bar{a}+[\bar{a}\,\text{rot}\,\bar{b}]+[\bar{b}\,\text{rot}\,\bar{a}] \quad (1)$$

Helyettesítsük ezen egyenletben $\bar{a}$ és $\bar{b}$ helyébe a térgörbe tangensét jelző $\bar{\tau}$ vectort, mivel $\bar{\tau}^2=1$ és $[\bar{\tau}\bar{\tau}]=0$, kapjuk

$$(\bar{\tau}\nabla)\,\bar{\tau}+[\bar{\tau}\,\text{rot}\,\bar{\tau}]=0.$$

Hasonlóképen kapjuk továbbá

$$(\bar{\nu}\nabla)\,\bar{\nu}+[\bar{\nu}\,\text{rot}\,\bar{\nu}]=0$$

és

$$(\bar{\beta}\nabla)\,\bar{\beta}+[\bar{\beta}\,\text{rot}\,\bar{\beta}]=0.$$

Ezen kifejezések elseje írható még

$$(\bar{\tau}\nabla)\,\bar{\tau}=\frac{d\bar{\tau}}{ds}=[\text{rot}\,\bar{\tau}\,\bar{\tau}].$$

Ebből a Frenet-féle formula felhasználásával kapjuk ezen fontos összefüggést

$$\frac{\bar{\nu}}{\rho_1} = [\text{rot}\,\bar{\tau}\,\bar{\tau}] \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. (2)$$

mint látható, egyeneseknél

$$[\text{rot}\,\bar{\tau}\,\bar{\tau}] = 0.$$

Szorozzuk meg a (2)-t vectorképen $\bar{\tau}$-val

$$\frac{\bar{\beta}}{\rho_1} = \Big[\bar{\tau}\,[\text{rot}\,\bar{\tau},\bar{\tau}]\Big] = \text{rot}\,\bar{\tau} - (\bar{\tau}\,\text{rot}\,\bar{\tau})\,\bar{\tau};$$

differentiálva ezt az ívelem szerint

$$\frac{d\,(\text{rot}\,\bar{\tau})}{ds} = \frac{d(\bar{\tau}\,\text{rot}\,\bar{\tau})}{ds}\bar{\tau} + (\bar{\tau}\,\text{rot}\,\bar{\tau})\frac{d\bar{\tau}}{ds} + \frac{1}{\rho_1}\frac{d\bar{\beta}}{ds} - \frac{\bar{\beta}}{\rho_1{}^2}\frac{d\rho_1}{ds} =$$

$$= \frac{d\,(\bar{\tau}\,\text{rot}\,\bar{\tau})}{ds}\bar{\tau} + \frac{(\bar{\tau}\,\text{rot}\,\bar{\tau})\,\bar{\nu}}{\rho_1} + \frac{\bar{\nu}}{\rho_1\,\rho_2} - \frac{1}{\rho_1{}^2}\frac{d\rho_1}{ds}\bar{\beta}.$$

Ebből

$$\bar{\nu}\,\frac{d\,(\text{rot}\,\bar{\tau})}{ds} = \frac{1}{\rho_1}\left(\frac{1}{\rho_2} + (\bar{\tau}\,\text{rot}\,\bar{\tau})\right) \quad .\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (3)$$

Szorozzuk a (2)-t scalarisan a $\bar{\nu}$-vel, kapjuk

$$\frac{1}{\rho_1} = \bar{\nu}\,[\text{rot}\,\bar{\tau}\,\bar{\tau}] = \bar{\beta}\,\text{rot}\,\bar{\tau} \quad .\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. (4)$$

Ha pedig az (1) összefüggésben $\bar{a} = \bar{\beta}$ és $\bar{b} = \bar{\tau}$ helyettesítést végzünk, lévén $[\bar{\beta}\,\bar{\tau}] = \bar{\nu}$,

$$\text{rot}\,\bar{\nu} = 2\,(\bar{\tau}\,\triangledown)\,\bar{\beta} + \bar{\beta}\,\text{div}\,\bar{\tau} - \bar{\tau}\,\text{div}\,\bar{\beta} + [\bar{\beta}\,\text{rot}\,\bar{\tau}] + [\bar{\tau}\,\text{rot}\,\bar{\beta}],$$

de

$$(\bar{\tau}\,\triangledown)\,\bar{\beta} = \frac{d\beta}{ds} = \frac{\bar{\nu}}{\rho_2},$$

tehát

$$\text{rot}\,\bar{\nu} = 2\,\frac{\bar{\nu}}{\rho_2} + \bar{\beta}\,\text{div}\,\bar{\tau} - \bar{\tau}\,\text{div}\,\bar{\beta} + [\bar{\beta}\,\text{rot}\,\bar{\tau}] + [\bar{\tau}\,\text{rot}\,\bar{\beta}].$$

Szorozzuk ezen egyenletet scalarisan $\bar{\nu}$-vel

$$\bar{\nu}\,\text{rot}\,\bar{\nu} = \frac{2}{\rho_2} + \bar{\nu}\,[\bar{\beta}\,\text{rot}\,\bar{\tau}] + \bar{\nu}\,[\bar{\tau}\,\text{rot}\,\bar{\beta}] =$$

$$= \frac{2}{\rho_2} + \text{rot}\,\bar{\tau}\,[\bar{\nu}\,\bar{\beta}] + \text{rot}\,\bar{\beta}\,[\bar{\nu}\,\bar{\tau}],$$

ebből

$$\frac{2}{\rho_2} = -\,\bar{\tau}\,\text{rot}\,\bar{\tau} + \bar{\nu}\,\text{rot}\,\bar{\nu} + \bar{\beta}\,\text{rot}\,\bar{\beta}{}^{*} \quad .\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (5)$$

A 10. pont (4) képlete alapján írhatjuk ezen összefüggéseket

---

[*] V. ö. 27. pont (14) formuláját, továbbá Taschenbuch für Mathematiker und Physiker. III. Jahrgang. 1913. Teubner. p. 164.

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{div}\bar\tau &= \operatorname{div}[\bar\nu\,\bar\beta] = \bar\beta \operatorname{rot}\bar\nu - \bar\nu \operatorname{rot}\bar\beta,\\ \operatorname{div}\bar\nu &= \operatorname{div}[\bar\beta\,\bar\tau] = \bar\tau \operatorname{rot}\bar\beta - \bar\beta \operatorname{rot}\bar\tau = \\ &= \bar\tau \operatorname{rot}\bar\beta - \frac{1}{\rho_1},\\ \operatorname{div}\bar\beta &= \operatorname{div}[\bar\tau\,\bar\nu] = \bar\nu \operatorname{rot}\bar\tau - \bar\tau \operatorname{rot}\bar\nu = \\ &= -\bar\tau \operatorname{rot}\bar\nu.\end{aligned}\right\}\quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Ez utolsó egyszerű formát azért írhattuk, mert a (2) szerint

$$\bar\nu \operatorname{rot}\bar\tau = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

A (6) képleteiből kapjuk

$$\begin{aligned}\bar\tau \operatorname{div}\bar\tau &= (\bar\beta \operatorname{rot}\bar\nu)\,\bar\tau - (\bar\nu \operatorname{rot}\bar\beta)\,\bar\tau,\\ \bar\nu \operatorname{div}\bar\nu &= (\bar\tau \operatorname{rot}\bar\beta)\,\bar\nu - (\bar\beta \operatorname{rot}\bar\tau)\,\bar\nu,\\ \bar\beta \operatorname{div}\bar\beta &= (\bar\nu \operatorname{rot}\bar\tau)\,\bar\beta - (\bar\tau \operatorname{rot}\bar\nu)\,\bar\beta.\end{aligned}$$

Másrészt kapjuk

$$\begin{aligned}[\bar\tau \operatorname{rot}\tau] &= \Big[[\bar\nu\,\bar\beta] \operatorname{rot}\bar\tau\Big] = (\bar\nu \operatorname{rot}\bar\tau)\,\bar\beta - (\bar\beta \operatorname{rot}\bar\tau)\,\bar\nu,\\ [\bar\nu \operatorname{rot}\bar\nu] &= \Big[[\bar\beta\,\bar\tau] \operatorname{rot}\bar\nu\Big] = (\bar\beta \operatorname{rot}\bar\nu)\,\bar\tau - (\bar\tau \operatorname{rot}\bar\nu)\,\beta,\\ [\bar\beta \operatorname{rot}\bar\beta] &= \Big[[\bar\tau\,\bar\nu] \operatorname{rot}\bar\beta\Big] = (\bar\tau \operatorname{rot}\bar\beta)\,\bar\nu - (\bar\nu \operatorname{rot}\bar\beta)\,\bar\tau.\end{aligned}$$

Ezen összefüggésekből azonnal adódik ezen szép összefüggés:

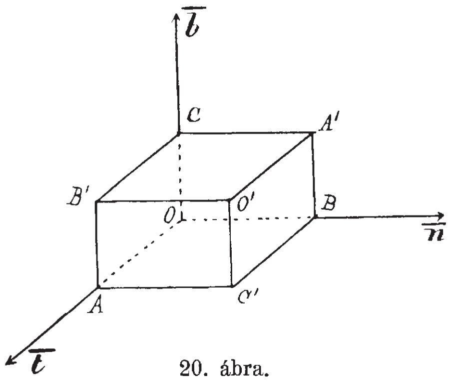
$$\bar\tau \operatorname{div}\bar\tau + \bar\nu \operatorname{div}\bar\nu + \bar\beta \operatorname{div}\bar\beta = [\bar\tau \operatorname{rot}\bar\tau] + [\bar\nu \operatorname{rot}\bar\nu] + [\bar\beta \operatorname{rot}\bar\beta]^{*} \quad \ldots\ldots (8)$$

27. A nabla-művelet kiszámítva a görbe triéderének segítségével.

Mint láttuk, a térgörbe minden pontjához tartozik egy triéder, melyet az érintő, a főnormalis és a binormalis határoz meg. Ezen irányokat a 23. pont alapján a következő általában nem egységnyi vectorok határozzák meg

$$\left.\begin{aligned}\bar t &= t\,\bar\tau = \bar r',\\ \bar n &= n\,\bar\nu = \Big[\bar r'[\bar r'\,\bar r'']\Big],\\ \bar b &= b\,\bar\beta = [\bar r'\,\bar r''].\end{aligned}\right\}\quad \ldots (1)$$

Ezen vectorok egyúttal egy derékszögű parallelepipedont határoznak meg, melynek egy csúcsban összefutó oldalai



20. ábra.

---

* Rothe R.: Anwendung der Vektoranalysis auf Differentialgeometrie. Jahresbericht d. deutsch. Mathem.-Vereinigung. 21. B. 1912. p. 267.

$$\overline{OA} = \bar{t},\ \overline{OB} = \bar{n} \text{ és } \overline{Ob} = \bar{b}.$$

Számítsuk ki ezen parallelepipedon segítségével a térgörbe vectoraihoz tartozó nablákat.

Ha a görbe

$$\bar{r} = \bar{f}(u)$$

vector-egyenlettel van adva, akkor a $\bar{\tau}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\beta}$ és a t, n, b értékek is u-nak a függvényei és az u szerint vett differentiálhányadosokat a közönséges módon jelölve kapjuk a Frenet-féle formulák felhasználásával:

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{d\bar{\tau}}{ds} = \dfrac{\bar{\nu}}{\rho_1}, & \dfrac{d\bar{\tau}}{dn} = \bar{\nu}\dfrac{t'}{\rho_1 n'}, & \dfrac{d\bar{\tau}}{db} = \bar{\nu}\dfrac{t'}{\rho_1 b'}, \\ \dfrac{d\bar{\nu}}{ds} = -\dfrac{\bar{\tau}}{\rho_1} - \dfrac{\bar{\beta}}{\rho_2}, & \dfrac{d\bar{\nu}}{dn} = -\bar{\tau}\dfrac{t'}{\rho_1 n'} - \bar{\beta}\dfrac{t'}{\rho_2 n'}, & \dfrac{d\bar{\nu}}{db} = -\bar{\tau}\dfrac{t'}{\rho_1 b'} - \bar{\beta}\dfrac{t'}{\rho_2 b'}, \\ \dfrac{d\bar{\beta}}{ds} = \dfrac{\bar{\nu}}{\rho_2}, & \dfrac{d\bar{\beta}}{dn} = \bar{\nu}\dfrac{t'}{\rho_2 n'}, & \dfrac{d\bar{\beta}}{db} = \bar{\nu}\dfrac{t'}{\rho_2 b'}. \end{array}\right\} \quad (2)$$

Legyen most már $(O\,O')$ a térgörbe O pontjához tartozó elemi parallelepipedon, melynek oldalai

$$\overline{OA} = dt\,\bar{\tau}, \quad \overline{OB} = dn\,\bar{\nu}, \quad \overline{Ob} = db\,\bar{\beta},$$

köbtartalma

$$dv = dt.\,dn.\,db.\,\bar{\tau}\,[\bar{\nu}\,\bar{\beta}] = dt.\,dn.\,db.$$

Ha a $\bar{\tau}$ divergentiáját óhajtjuk kiszámítani, alkossuk meg a 9. pontban jelzett szorzatokat. A parallelepipedon $OBA'C$ és $AC'O'B'$ oldallapjainál

$$-dn\,db\,\bar{\tau}\,.\,\bar{\tau} + dn\,db\,\bar{\tau}\,(\bar{\tau} + \frac{\bar{\nu}}{\rho_1}dt),$$

az $OCB'A$ és $BA'O'C'$ oldallapokra vonatkozólag

$$-dt\,db\,\bar{\nu}\bar{\tau} + dt\,db\,\bar{\nu}\,(\bar{\tau} + \bar{\nu}\frac{t'}{\rho_1 n'}dn)$$

s végül az $OBC'A$ és $CA'O'B'$ lapoknál

$$-dt\,dn\,\bar{\beta}\bar{\tau} + dt\,dn\,\bar{\beta}\,(\bar{\tau} + \bar{\nu}\frac{t'}{\rho_1 b'}db).$$

Ezek összege osztva a dv köbtartalommal adja a következő képletet

$$\operatorname{div}\bar{\tau} = \frac{t'}{\rho_1 n'}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Hasonló számítással kapjuk

$$\operatorname{div}\bar{\nu} = -\frac{1}{\rho_1} - \frac{t'}{\rho_2 b'}, \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

és

$$\operatorname{div}\bar{\beta} = \frac{t'}{\rho_2 n'} \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Ugyanily úton kapjuk ezen három egységnyi vector rotatióját:

$$\operatorname{rot}\bar{\tau} = \frac{\bar{\beta}}{\rho_1} - \bar{\tau}\frac{t'}{\rho_1 b'} \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

$$\operatorname{rot}\bar{\nu} = \frac{\bar{\nu}}{\rho_2} - \bar{\nu}\frac{t'}{\rho_1 b'} + \bar{\beta}\frac{t'}{\rho_1 n'} - \bar{\tau}\frac{t'}{\rho_2 n'} \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

$$\operatorname{rot}\bar{\beta} = \frac{\bar{\beta}}{\rho_2} - \bar{\tau}\frac{t'}{\rho_2 b'} \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Ezen utóbbi hat képlet segítségével is könnyen igazolható az előző pont (8) összefüggése:

$$\bar{\tau}\operatorname{div}\bar{\tau} + \bar{\nu}\operatorname{div}\bar{\nu} + \bar{\beta}\operatorname{div}\bar{\beta} = [\bar{\tau}\operatorname{rot}\bar{\tau}] + [\bar{\nu}\operatorname{rot}\bar{\nu}] + [\bar{\beta}\operatorname{rot}\bar{\beta}].$$

További fontos összefüggések a következők:

$$\rho_1 \operatorname{div}\bar{\tau} = \rho_2 \operatorname{div}\bar{\beta} \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

$$\left.\begin{array}{lll} \bar{\tau}\operatorname{rot}\bar{\tau} = -\dfrac{t'}{\rho_1 b'}, & \bar{\nu}\operatorname{rot}\bar{\tau} = 0, & \bar{\beta}\operatorname{rot}\bar{\tau} = \dfrac{1}{\rho_1}, \\ \bar{\tau}\operatorname{rot}\bar{\nu} = -\dfrac{t'}{\rho_2 n'}, & \bar{\nu}\operatorname{rot}\bar{\nu} = \dfrac{1}{\rho_2} - \dfrac{t'}{\rho_1 b'}, & \bar{\beta}\operatorname{rot}\bar{\nu} = \dfrac{t'}{\rho_1 n'}, \\ \bar{\tau}\operatorname{rot}\bar{\beta} = -\dfrac{t'}{\rho_2 b'}, & \bar{\nu}\operatorname{rot}\bar{\beta} = 0, & \bar{\beta}\operatorname{rot}\bar{\beta} = \dfrac{1}{\rho_2}. \end{array}\right\} \ldots (10)$$

Ezen csoportból közvetlenül felírhatók ezen egyenletek:

$$\rho_1 \bar{\beta}\operatorname{rot}\bar{\tau} = \rho_2 \bar{\beta}\operatorname{rot}\bar{\beta} = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

$$\rho_1 \bar{\tau}\operatorname{rot}\bar{\tau} - \rho_2 \bar{\tau}\operatorname{rot}\bar{\beta} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

$$\rho_1 \bar{\beta}\operatorname{rot}\bar{\nu} + \rho_2 \bar{\tau}\operatorname{rot}\bar{\nu} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

$$\frac{1}{\rho_2} = \bar{\nu}\operatorname{rot}\bar{\nu} - \bar{\tau}\operatorname{rot}\bar{\tau} \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Mint látjuk, ezen utolsó összefüggés egyszerűbb, mint a 26. pont (5) képlete.

28. Alkalmazás a csavarvonalra.

Legyen adva az $(x\,y)$ síkban az

$$\bar{r}_1 = \varphi_1(s_1)\,\bar{\varepsilon}_1 + \varphi_2(s_1)\,\bar{\varepsilon}_2$$

görbe, hol s_1 a görbe ívhossza bizonyos ponttól számítva. Azon egyenes henger egyenlete, melynek alapja vagy irányvonala az adott görbe

$$\bar{r} = \bar{r}_1 + x\bar{\varepsilon}_3.$$

Ezen hengerfelületre írt azon csavarvonal egyenlete, mely a henger alkotóit δ szög alatt metszi

$$\bar{r} = \bar{r}_1 + s_1\, tg\, \delta\, \bar{\varepsilon}_3. \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

A csavarvonal ívelemének vectora

$$d\bar{r} = \left(\frac{d\varphi_1}{ds_1}\bar{\varepsilon}_1 + \frac{d\varphi_2}{ds_1}\bar{\varepsilon}_2 + tg\,\delta\,\bar{\varepsilon}_3\right) ds_1,$$

az ívelem pedig

$$ds = \sqrt{\left(\frac{d\varphi_1}{ds_1}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_2}{ds_1}\right)^2 + tg^2\,\delta} \,.\, ds_1$$

vagy tekintettel $d\varphi_1^2 + d\varphi_2^2 = ds_1^2$ egyenlőségre,

$$ds = \sqrt{1 + tg^2\,\delta} \,.\, ds_1 = \frac{ds_1}{\cos\delta} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

és ebből

$$s = \frac{s_1 + c}{\cos\delta}. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

A csavarvonal tangensének vectora

$$\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds} = \left(\frac{dr_1}{ds_1} + tg\,\delta\,\bar{\varepsilon}_3\right)\cos\delta = \bar{\tau}_1\cos\delta + \sin\delta\,\bar{\varepsilon}_3 \;.\;.\;. \quad (4)$$

ha az irányvonal tangensének irányát $\bar{\tau}_1$-el jelöljük.

A (4) egyenlőségből kapjuk

$$\frac{\bar{\nu}}{\rho_1} = \frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{d\bar{\tau}_1}{ds_1}\frac{ds_1}{ds}\cos\delta = \frac{\bar{\nu}_1}{\rho}\cos^2\delta, \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

hol ρ az alapgörbe görbületi sugara. Ezen képletből láthatjuk, hogy $\bar{\nu} = \bar{\nu}_1$, vagyis a csavarvonal főnormalisa párhuzamos az alapgörbe normalisával, továbbá az (5)-ből adódik

$$\rho_1\cos^2\delta = \rho \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

A

$$\bar{\nu} = \bar{\nu}_1 = [\bar{\varepsilon}_3\,\bar{\tau}_1] = -\varphi_2'\,\bar{\varepsilon}_1 + \varphi_1'\,\bar{\varepsilon}_2 \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

egyenletből a Frenet-féle formula alkalmazásával kapjuk

$$\frac{d\bar{\nu}}{ds} = \frac{d\bar{\nu}_1}{ds_1}\frac{ds_1}{ds} = \frac{d\bar{\nu}_1}{ds_1}\cos\delta = -\frac{\bar{\tau}}{\rho_1} - \frac{\bar{\beta}}{\rho_2}.$$

A (4) alkalmazásával

$$\begin{aligned}\bar{\beta} = [\bar{\tau}\,\bar{\nu}] = [\bar{\tau}_1\,\bar{\nu}]\cos\delta + [\bar{\varepsilon}_3\,\bar{\nu}]\sin\delta &= \\ = \bar{\varepsilon}_3\cos\delta - \bar{\tau}_1\sin\delta, \ldots\ldots\ldots\ldots& \quad (8)\end{aligned}$$

ebből

$$\frac{d\bar{\beta}}{ds} = -\frac{d\bar{\tau}_1}{ds_1}\frac{ds_1}{ds}\sin\delta = -\frac{\bar{\nu}_1}{\rho}\cos\delta\sin\delta = \frac{\bar{\nu}}{\rho_2}.$$

Ez utóbbiból

$$\rho_2\sin\delta\cos\delta = -\rho$$

és a (6) eredményét használva, kapjuk

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = -tg\,\delta,$$

vagyis bármely csavarvonalnál a két görbületi sugár viszonya állandó.

Ezen tétel fordítottja is áll: vagyis azon térgörbe, melynél a görbületi és torsio-sugár viszonya állandó, csavarvonal.*

Ha ugyanis

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = k,$$

akkor a Frenet-féle formulák alapján írható

$$\rho_1 \frac{d\bar{\tau}}{ds} = \rho_2 \frac{d\bar{\beta}}{ds},$$

$$k \frac{d\bar{\tau}}{ds} - \frac{d\bar{\beta}}{ds} = 0,$$

$$k\,\bar{\tau} - \bar{\beta} = \bar{e},$$

hol $\bar{e}$ állandó nagyságú és irányú vector.

Szorozzuk ezen kifejezést scalarisan $\bar{\tau}$-val,

$$k = (\bar{e}\,\bar{\tau}),$$

a mi azt jelenti, hogy a $\bar{\tau}$-nak az állandó $\bar{e}$-re való vetülete mindig k, vagyis a görbe állandó szög alatt metsz bizonyos irányú egyenest, tehát csavarvonal.

Alkalmazzuk most a 27. pont eredményeit. Mivel

$$t^2 = \varphi_1{'^2} + \varphi_2{'} + c^2 = 1 + tg^2\,\delta = \frac{1}{\cos^2\delta}$$

állandó, tehát $t' = 0$.

Ennek felhasználásával azonnal írhatók a következő összefüggések

$$\operatorname{div} \bar{\tau} = 0,$$

$$\operatorname{div} \bar{\nu} = -\frac{1}{\rho_1},$$

$$\operatorname{div} \bar{\beta} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \bar{\tau} = \frac{\bar{\beta}}{\rho_1},$$

$$\operatorname{rot} \bar{\nu} = \frac{\bar{\nu}}{\rho_2},$$

---

* Kommerell V. u. K.: Allgemeine Theorie . . . I. B. 2. Aufl. 1909. p. 34. Burali—Forti C.: Introduction . . . Paris 1897. p. 125.

Scheffers G.: Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. I. B. Einführung in die Theorie der Curven in der Ebene und im Raume. Leipzig. Veit. 1901. p. 221.

$$\operatorname{rot}\bar{\beta} = \frac{\bar{\beta}}{\rho_2},$$

$$\bar{\beta}\operatorname{rot}\bar{\tau} = \frac{1}{\rho_1}, \qquad \bar{\beta}\operatorname{rot}\bar{\beta} = \bar{\nu}\operatorname{rot}\bar{\nu} = \frac{1}{\rho_2}.$$

Körös csavarvonalnál

$$\bar{r} = a\cos\frac{s}{a}\bar{\varepsilon}_1 + a\sin\frac{s}{a}\bar{\varepsilon}_2 + cs\,\bar{\varepsilon}_3.$$

Itt az alapkörnél $\rho = a$, tehát a két görbületi sugár maga is állandó. Fordítva, ha valamely térgörbének görbületi sugara és torsiósugara állandó, akkor a görbe körös csavarvonal. Ez esetben ugyanis a két sugár viszonya is állandó, tehát a görbe csavarvonal, másrészt a (4) képletből következik a ρ állandósága, vagyis a henger alapgörbéje kör.

29. Bertrand-féle görbék.

Az $\bar{r} = \bar{f}(u)$ és $\bar{r}_1 = \bar{f}_1(u)$ radius-vectorokkal meghatározott görbéket *Bertrand-féle görbéknek* nevezzük, ha mindkét görbének ugyanaz a főnormalisa.* Ha a két görbe egymáshoz tartozó P és P_1 pontjainak távolsága λ, akkor

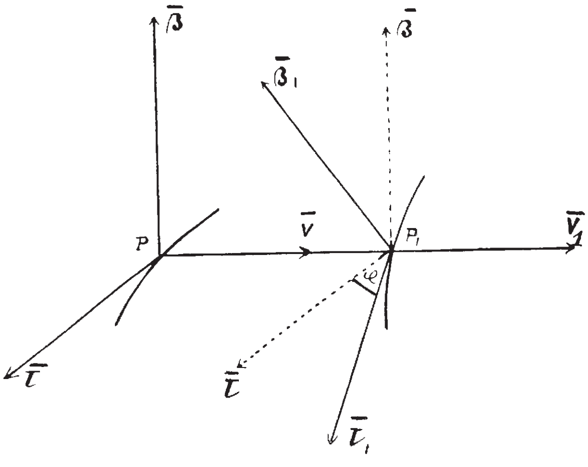
$$\bar{r}_1 = \bar{r} + \lambda\bar{\nu}. \quad . \ (1)$$

Ha az új érintő iránya φ szöget zár be az $\bar{r}$ simuló síkjával, akkor állanak a következő kapcsolatok

$$\bar{\tau}_1 = \bar{\tau}\cos\varphi - \bar{\beta}\sin\varphi \quad . \ . \ . \ (2)$$

$$\bar{\beta}_1 = \bar{\tau}\sin\varphi + \bar{\beta}\cos\varphi \quad . \ . \ . \ (3)$$

Differentiálva az (1)-et, a Frenet-féle formulák felhasználásával, nyerjük



21. ábra.

---

* Darboux G.: Leçous sur la théorie générale des surfaces... Gauthier, Paris. I. Partie. 1887. p. 13.

$$\frac{d\bar{r}_1}{ds} = \frac{d\bar{r}_1}{ds_1}\frac{ds_1}{ds} = \bar{\tau}_1\frac{ds_1}{ds} = \left(1 - \frac{\lambda}{\rho_1}\right)\bar{\tau} - \frac{\lambda}{\rho_2}\bar{\beta} + \bar{\nu}\frac{d\lambda}{ds},$$

vagy a (2) értékét helyettesítve

$$\frac{ds_1}{ds}\cos\varphi\,\bar{\tau} - \frac{ds_1}{ds}\sin\varphi\,\bar{\beta} = \left(1 - \frac{\lambda}{\rho_1}\right)\bar{\tau} - \frac{\lambda}{\rho_2}\bar{\beta} + \bar{\nu}\frac{d\lambda}{ds};$$

ezen egyenlőségből ered

$$\frac{ds_1}{ds}\cos\varphi = 1 - \frac{\lambda}{\rho_1},$$

$$\frac{ds_1}{ds}\sin\varphi = \frac{\lambda}{\rho_2} \text{ és } \frac{d\lambda}{ds} = 0,$$

és így kapjuk

$$\left.\begin{aligned} &\frac{ds_1{}^2}{ds^2} = \left(1 - \frac{\lambda}{\rho_1}\right)^2 + \frac{\lambda^2}{\rho_2{}^2}, \\ &\lambda = \text{const és } \frac{1}{\rho_1} + \frac{\operatorname{ctg}\varphi}{\rho_2} = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Ha az $\bar{r}_1$ görbe görbületi és torsio-sugarát R_1 és R_2-vel jelöljük, mivel a két görbe főnormalisa ugyanaz, a (2) és (3) formulából kapjuk

$$\frac{\bar{\nu}}{R_1} = \frac{d\bar{\tau}_1}{ds_1} = \frac{d\bar{\tau}_1}{ds}\frac{ds}{ds_1} = \left(\frac{\cos\varphi}{\rho_1} - \frac{\sin\varphi}{\rho_2}\right)\frac{ds}{ds_1}\bar{\nu} - (\sin\varphi\,\bar{\tau} + \cos\varphi\,\bar{\beta})\frac{ds}{ds_1}\frac{d\varphi}{ds},$$

$$\frac{\bar{\nu}}{R_2} = \frac{d\bar{\beta}_1}{ds_1} = \frac{d\bar{\beta}_1}{ds}\frac{ds}{ds_1} = \left(\frac{\sin\varphi}{\rho_1} + \frac{\cos\varphi}{\rho_2}\right)\frac{ds}{ds_1}\bar{\nu} + (\cos\varphi\,\bar{\tau} - \sin\varphi\,\bar{\beta})\frac{ds}{ds_1}\frac{d\varphi}{ds}.$$

Ezen egyenlőségekből kapjuk $\frac{d\varphi}{ds} = 0$, tehát $\varphi = \text{const}$ és így

$$\frac{1}{R_1} = \left(\frac{\cos\varphi}{\rho_1} - \frac{\sin\varphi}{\rho_2}\right)\frac{ds}{ds_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$\frac{1}{R_2} = \left(\frac{\sin\varphi}{\rho_1} + \frac{\cos\varphi}{\rho_2}\right)\frac{ds}{ds_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

A $\lambda = \text{const.}$ és $\varphi = \text{const.}$ a *Serret-féle tételt* fejezi ki, mely szerint az $\bar{r}$ és $\bar{r}_1$ görbe triédere merev kapcsolatban van egy-

---

Bianchi L.—Lukat M.: Vorlesungen über Differentialgeometrie. 2. Aufl. 1910. Teubner. p. 32.

Cesàro E.—Kowalewski G.: Elementares Lehrbuch d. alg. Anal. Teubner 1904. p. 634.

v. Lilienthal R.: Vorlesungen über Differentialgeometrie. Teubner I. B. 1908. p. 286.

Burali—Forti C.: Introduction à la Géométrie différentielle. Paris. 1897. p. 153.

Tannenberg W. de: Leçons nouvelles sur les applications géométriques du calcul différentiel. Paris. Hermann. 1899. p. 89.

mással. A (4) utolsó kifejezése szerint a Bertrand-féle görbe görbülete és torsiója között állandó együtthatójú linearis kapcsolat áll fenn.

Mivel az $\bar{r}$ és $\bar{r}_1$ közötti viszony kölcsönös, eddigi tárgyalásunkat fordítva is végezhettük volna, csak a λ és φ értéke helyett $-\lambda$ és $-\varphi$ értékeket helyettesítsünk. Ez alapon közvetlenül írhatjuk a következő összefüggéseket

$$\frac{1}{R_1}-\frac{\operatorname{ctg}\varphi}{R_2}=-\frac{1}{\lambda} \qquad \frac{ds^2}{ds_1^2}=\left(1+\frac{\lambda}{R_1}\right)^2+\frac{\lambda^2}{R_2^2}, \ldots\ldots (7)$$

és az (5) és (6) alapján

$$\frac{1}{\rho_1}=\left(\frac{\cos\varphi}{R_1}+\frac{\sin\varphi}{R_2}\right)\frac{ds_1}{ds} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

$$\frac{1}{\rho_2}=\left(-\frac{\sin\varphi}{R_1}+\frac{\cos\varphi}{R_2}\right)\frac{ds_1}{ds} \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

ezen egyenletekre úgy is rájuthatunk, hogy az (5) és (6)-ot $\frac{1}{\rho_1}$ és $\frac{1}{\rho_2}$-re megoldjuk.

Akár az (5) és (6), akár a (8) és (9) négyzeteinek összegét veszszük, kapjuk ezen összefüggést

$$ds^2\left(\frac{1}{\rho_1^2}+\frac{1}{\rho_2^2}\right)=ds_1^2\left(\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}\right). \ldots\ldots\ldots (10)$$

Ha pedig a (8) és (9) értékeit a (4) utolsó képletébe helyettesítjük, ezen

$$\frac{1}{R_2}=\frac{\sin\varphi}{\lambda}\frac{ds}{ds_1}$$

összefüggésre jutunk. Hasonlókép írhatjuk

$$\frac{1}{\rho_2}=\frac{\sin\varphi}{\lambda}\frac{ds_1}{ds}.$$

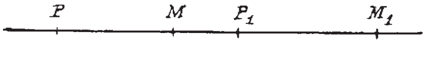
Ezen két egyenlőség összeszorzásából kapjuk

$$\frac{1}{R_2\rho_2}=\frac{\sin^2\varphi}{\lambda^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

szavakban kifejezve kapjuk *Schell tételét:* az egymáshoz tartozó Bertrand-féle görbék torsióinak szorzata állandó.

Végül bebizonyíthatjuk *Mannheim tételét,* mely szerint az $\bar{r}$ és $\bar{r}_1$ megfelelő pontjainak és a hozzátartozó görbületi középpontoknak kettős viszonya állandó.

Ha a P és P_1 pontokhoz tartozó görbületi középpontokat M és M_1-el jelöljük, akkor



22. ábra.

$$(P P_1 M M_1) = \frac{\rho_1 R_1}{(\rho_1 - \lambda)\,(R_1 + \lambda)} = \frac{\frac{1}{\lambda^2}}{\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\rho_1}\right)\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{R_1}\right)}.$$

Számítsuk most ki a (4) és (7)-ből $\frac{1}{\rho_2}$ és $\frac{1}{R_2}$ értékeit és helyettesítsük a (11)-be, kapjuk ezen összefüggést

$$\frac{\cos^2\varphi}{\lambda^2} = \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\rho_1}\right)\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{R_1}\right).$$

Ezen értéket felhasználva

$$(P P_1 M M_1) = \frac{1}{\cos^2\varphi} = \text{const.}$$

III. FEJEZET.

Felületek elmélete.

30. Az érintő és érintősík.

Ha valamely felület egyenlete a Gauss-féle görbevonalú coordináták segítségével kifejezve

$$x = \varphi_1(u, v), \quad y = \varphi_2(u, v), \quad z = \varphi_3(u, v),$$

akkor vectoregyenlete az origóból kiinduló radius-vectorral

$$\bar{r} = \varphi_1(u, v)\,\bar{\varepsilon}_1 + \varphi_2(u, v)\,\bar{\varepsilon}_2 + \varphi_3(u, v)\,\bar{\varepsilon}_3 = \bar{F}(u, v).$$

Ezen felületen is vizsgáljuk az u és v paraméterrel meghatározott P pontot. Legyen ezen pont szomszédságában a P_1 pont, melynek paraméterei $(u + du,\ v + dv)$, ezen pont radius-vectora

$$\bar{r}_1 = \bar{F}(u + du,\ v + dv) = \bar{r} + \bar{r}'_u\,du + \bar{r}'_v\,dv + \varepsilon,$$

hol ε a másodrendű és magasabbrendű végtelen kicsik összeségét jelzi, ha du és dv elsőrendűek.

A $\quad \overline{P P_1} = \bar{r}_1 - \bar{r} = d\bar{r} = \bar{r}'_u\,du + \bar{r}'_v\,dv$

a két vizsgált pontot összekötő vector értéke.

Ezen vector absolut értéke a vonalelem

$$ds = |\,d\bar{r}\,|,$$

és ennek négyzete

$$ds^2 = |\,d\bar{r}\,|^2 = \bar{r}'^2_u\,du^2 + 2\,(\bar{r}'_u\,\bar{r}'_v)\,du\,dv + \bar{r}'^2_v\,dv^2 =$$
$$= E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

hol $\quad E = \bar{r}'^2_u, \quad F = \bar{r}'_u\,\bar{r}'_v, \quad G = \bar{r}'^2_v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$

a Gauss-féle *elsőrendű alapmennyiségek.*

A vonalelem vectorából a tangens irányát jelző egységnyi vector

$$\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{r}'_u \frac{du}{ds} + \bar{r}'_v \frac{dv}{ds}$$

lesz. Mint látható a felület egy pontjában végtelen sok érintő van, melyeknek iránya a *du* és *dv* választásától függ. Ha az *u* és *v* között a $\varphi(u, v) = 0$ egyenlet áll fenn, akkor ennek differentiálása $\varphi'_u\, du + \varphi'_v\, dv = 0$ összefüggést szolgáltatja a *du* és *dv* között és ezen irányban a tangens-irány

$$\bar{\tau}_\varphi = \left(\bar{r}'_u - \bar{r}'_v \frac{\varphi'_u}{\varphi'_v}\right) \frac{du}{ds} = \left(- \bar{r}'_u \frac{\varphi'_v}{\varphi'_u} + \bar{r}'_v\right) \frac{dv}{ds}.$$

A $\varphi(u, v) = 0$, illetőleg a $\varphi'_u\, du + \varphi'_v\, dv = 0$ összefüggés tehát azon pontokban, melyek egyenletét kielégítik, határozott tangens irányt ad és ez a felület egy görbéjének egyenlete.

Ha a vonalelemnél *v* változása $dv = 0$, akkor oly $v = \text{const.}$ görbét vizsgálunk, mely mentén csak *u* változik és a felület ezen görbéjét *u*-paramétervonalnak hívjuk. Ezen görbe vonaleleme

$$ds_u^2 = \bar{r}'^2_u\, du^2 = E\, du^2.$$

Érintőjének vectora

$$\bar{\tau}_u = \bar{r}'_u \frac{du}{ds_u} = \frac{\bar{r}'_u}{\sqrt{E}}.$$

A *v*-paraméter-vonalnál

$$ds_v^2 = \bar{r}'^2_v\, dv^2 = G\, dv^2$$

és

$$\bar{\tau}_v = \bar{r}'_v \frac{dv}{ds_v} = \frac{\bar{r}'_v}{\sqrt{G}}.$$

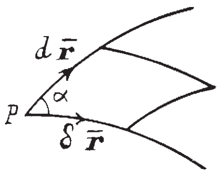
Vizsgáljunk most a felület egy $P(u, v)$ pontjából kiinduló két (du, dv) és $(\delta u, \delta v)$ irányú vonalelemet. A két vonalelem vectora

$$d\bar{r} = \bar{r}'_u\, du + \bar{r}'_v\, dv,$$
$$\delta\bar{r} = \bar{r}'_u\, \delta u + \bar{r}'_v\, \delta v.$$

Vegyük ezek vector-szorzatát

$$[d\bar{r}\, \delta\bar{r}] = [\bar{r}'_u\, \bar{r}'_v]\, (du\, \delta v - dv\, \delta u).$$

Ennek absolut értéke adja a két vonalelem között lévő parallelogramma területét. Nézzük tehát $[\bar{r}'_u\, \bar{r}'_v]$ absolut értékét, e czélból emeljük négyzetre



23. ábra.

$$[\bar{r}'_u \bar{r}'_v]^2 = \bar{r}'^2_u \bar{r}'^2_v - (\bar{r}'_u \bar{r}'_v)^2 = EG - F^2 = D^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}^2 \quad \ldots\ldots (3)$$

tehát az elemi terület

$$do = D\,(du\,\delta v - dv\,\delta u) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

A két paraméter-vonal által bezárt elemi területnél $\delta u = 0$ és $dv = 0$, tehát

$$do_0 = D\,du\,\delta v.$$

Alkossuk most meg a $d\bar{r}$ és $\delta\bar{r}$ scalaris szorzatát:

$$d\bar{r}\,\delta\bar{r} = ds\,\delta s \cos\alpha = E\,du\,\delta u + F\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v,$$

hol α a két vonalelem által bezárt szög. Ebből a hajlásszög cosinusa

$$\cos\alpha = \frac{E\,du\,\delta u + F\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{ds\,\delta s}.$$

A paraméter-vonalak által bezárt szög esetében

$$\cos\alpha_0 = \frac{F\,du\,dv}{ds_u\,ds_v} = \frac{F}{\sqrt{EG}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Ebből látható, hogy a paraméter-vonalak merőlegességének feltétele

$$\bar{r}'_u \bar{r}'_v = F = 0$$

lesz. Az (5)-ből kaphatjuk továbbá ezen értékeket

$$\sin\alpha_0 = \frac{D}{\sqrt{EG}} \text{ és } tg\,\alpha_0 = \frac{D}{F}.$$

A felület P pontjából kiinduló összes vonalelemek egy síkban feküsznek, amit abból láthatunk, hogy mindegyik az $\bar{r}'_u$ és $\bar{r}'_v$ segítségével linearisan előállítható. Ezen síkot a felület P pontjához tartozó *érintő síknak* nevezzük. Ennek egyenlete

$$Q = P + \bar{r} + \lambda\,\bar{r}'_u + \mu\,\bar{r}'_v,$$

vagy

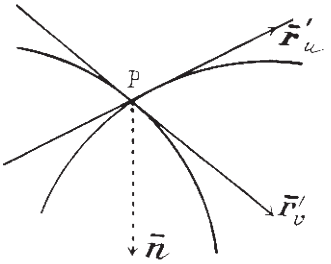
$$Q = P + \bar{r} + \lambda\,\bar{\tau}_u + \mu\,\bar{\tau}_u$$

alakban írható, hol λ és μ egymástól független változók.

31. A felület normalisa.

Határozzuk most meg a felület P pontjához tartozó azon egységnyi vectort, mely merőleges a felületre és oly helyzetű az $\bar{r}'_u$ és $\bar{r}'_v$ irányokhoz, mint a (z) tengely az (x) és (y)-hoz. Ezen vector irányát az $[\bar{r}'_u \bar{r}'_v]$ szorzat adja, s mivel ennek absulot értéke D, a keresett vector

$$\bar{n} = \frac{[\bar{r}'_u \bar{r}'_v]}{D} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$



24. ábra.

Ezen irányt a felület *normalisának* nevezzük. A normalis, mint látjuk, merőleges a P pontból kiinduló és a felülethez tartozó minden vonalelemre, vagyis az érintősíkra.

A normalis irányát részletesen kiírva

$$\bar{n} = \frac{1}{D}\left[\frac{\partial x}{\partial u}\bar{\varepsilon}_1 + \frac{\partial y}{\partial u}\bar{\varepsilon}_2 + \frac{\partial z}{\partial u}\bar{\varepsilon}_3,\ \frac{\partial x}{\partial v}\bar{\varepsilon}_1 + \frac{\partial y}{\partial v}\bar{\varepsilon}_2 + \frac{\partial z}{\partial v}\bar{\varepsilon}_3\right] =$$

$$= \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \bar{\varepsilon}_1 & \bar{\varepsilon}_2 & \bar{\varepsilon}_3 \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Ebből a normalis iránycosinusai

$$\xi = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \eta = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \xi = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Innét még az is látható, hogy

$$D^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}^2.$$

Az $\bar{n}$ ismeretével felírhatjuk a felület P pontjához tartozó normalisnak az egyenletét, mely lesz

$$Q = P + w\,\bar{n}.$$

Azon felület egyenlete, mely az eredetiből úgy keletkezik, hogy normalisára az állandó a távolságot rámérjük

$$Q = P + a\,\bar{n},$$

ezen felület elemi vectora

$$d\,Q = d\,P + a\,d\bar{n}.$$

Szorozzuk meg ezen egyenlőséget $\bar{n}$-el, kapjuk

$$\bar{n}\,d\,Q = 0,$$

tehát az új felület vonaleleme párhuzamos a régi felület megfelelő vonalelemével és így a megfelelő pontok érintő síkjai is párhuzamosak.

Az $\bar{n}$ segítségével kiszámíthatjuk az origonak az érintősíktól való távolságát is, a mit ha T-vel jelzünk,

$$T = \bar{n}\,\bar{r},$$

ebből kapjuk

$$T'_u = \bar{n}'_u\,\bar{r}, \text{ és } T'_v = \bar{n}'_v\,\bar{r}.$$

Végül az érintősíknak újabb egyenletét is megállapíthatjuk. Ha ugyanis a P pont érintősíkjának változó pontja Q, akkor a $Q - P$ vector állandóan merőleges az $\bar{n}$-re és így

$$(Q - P)\,[\bar{r}'_u\,\bar{r}'_v] = 0$$

egyenlőség változó Q mellett az érintősík egyenletét szolgáltatja.

Vizsgáljuk most a felület viselkedését egy P pontjának szomszédságában. E czélból messük a felületet a P ponthoz közel oly síkkal, mely párhuzamos a P érintősíkjával. Az így létrejövő síkmetszet a P ponthoz tartozó *Dupin-féle indicatrix.**

Ezen görbe pontjaihoz a P-ből kiindulva kétfélekép juthatunk el: mivel a P-nek szomszédos pontjai, azért radius-vectoruk a harmadrendű és magasabbrendű végtelen kicsik elhagyásával

$$\bar{r} + d\bar{r} + \tfrac{1}{2}\,d^2\bar{r}$$

alakkal jellemezhető, másrészt a P-ből kiindulva a normalis mentén λ távolságban és innen az érintősíkkal párhuzamosan haladva eljuthatunk ugyanazon pontba, tehát írhatjuk

$$\bar{r} + d\bar{r} + \tfrac{1}{2}\,d^2\,\bar{r} = \bar{r} + \alpha\,\bar{r}'_u + \beta\,\bar{r}'_v + \lambda\,\bar{n} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \;(1)$$

Ezen kifejezésben az α és β elsőrendű, a λ pedig másodrendű kicsinyek, ha a $d\bar{r} = \bar{r}'_u\,du + \bar{r}'_v\,dv$ kifejezésben a du és dv elsőrendű végtelen kicsi mennyiségek.

Szorozzuk meg az (1) mindkét oldalát $\bar{n}$ vectorral, egyszerűsítés után marad

$$2\,\lambda = d^2\,\bar{r}\,\bar{n} = L\,du^2 + 2\,M\,du\,dv + N\,dv^2, \;.\;.\;.\;. \;(2)$$

ha egyszerűség kedvéért

$$\bar{r}''_{uu}\,\bar{n} = L, \quad \bar{r}''_{uv}\,\bar{n} = M, \quad \bar{r}''_{vv}\,\bar{n} = N$$

rövidítéseket hozzuk be.

---

* Kommerell V. u. K.: Allgemeine Theorie... I. B. 2. Aufl. 1909. p. 84. Scheffers G.: Anwendung der Differential- und Integral-rechnung auf Geometrie. II. B. Einführung in die Theorie der Flächen. Leipzig. Veit. 1902. p. 133.

A (2) tehát a Dupin-féle indicatrix egyenlete. Ha ezen kifejezésben

$$LN - M^2 < 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

ez esetben a λ akár positiv, akár negativ előjelű, mindig két valós $(du \mid dv)$ értékpárt kapunk, mely a (2)-t kielégíti. Geometriailag ez annyit jelent, hogy a P pont érintősíkjának bármelyik oldalán messük is a felületet az érintősíkkal párhuzamosan, a metszésvonal mindig valós és hyperbola, innen mondjuk a P pontról, hogy a (3) esetében hyperbolikus pont.

Ha pedig

$$LN - M^2 > 0$$

akkor a (2) a λ-nak csak egyik előjelű értékei mellett ad valós megoldást. Ez esetben a felület az érintősík egyik oldalán helyezkedik el, a metszési görbék pedig ellipsisek. A P pontot ez esetben elliptikusnak mondjuk.

Ha ellenben

$$LN - M^2 = 0$$

a λ egyik előjelű értékei mellett két egybeeső értékpárt kapunk. A P pont környezete tehát a P érintősíkjának egyik oldalán fekszik és az érintősíkkal párhuzamos metszet első megközelítésben egyenespár. A P pontot ekkor parabolikus pontnak mondjuk.[*]

32. Főbb összefüggések a felület vectorai között.

Mielőtt tovább haladnánk fejtegetéseinkben, a felületnél fellépő vectorok között bizonyos összefüggéseket fogunk megállapitani.

Rövidség kedvéért ezeket a — részben már használt — rövidítéseket vezetjük be:

$$\begin{array}{llll}
(\bar{r}'_u\, \bar{r}'_u) = E, & (\bar{r}'_u\, \bar{r}'_v) = F, & (\bar{r}'_v\, \bar{r}'_v) = G, & (1) \\
(\bar{r}'_u\, \bar{r}''_{uu}) = m, & (\bar{r}'_u\, \bar{r}''_{uv}) = m', & (\bar{r}'_u\, \bar{r}''_{vv}) = m'', & (2)^{**} \\
(\bar{r}'_v\, \bar{r}''_{uu}) = n, & (\bar{r}'_v\, \bar{r}''_{uv}) = n', & (\bar{r}'_v\, \bar{r}''_{vv}) = n'', & (3)^{**}
\end{array}$$

---

[*] V. ö. a 33. pont eredményeivel.

[**] A (2) és (3) képletcsoport megegyezik a Christoffel-féle elsőrendű jelekkel:

$$\begin{bmatrix}1\;1\\1\end{bmatrix} = m, \qquad \begin{bmatrix}1\;2\\1\end{bmatrix} = m', \qquad \begin{bmatrix}2\;2\\1\end{bmatrix} = m'',$$

$$\begin{bmatrix}1\;1\\2\end{bmatrix} = n, \qquad \begin{bmatrix}1\;2\\2\end{bmatrix} = n', \qquad \begin{bmatrix}2\;2\\2\end{bmatrix} = n''.$$

L. Bianchi-Lukat: Vorlesungen über Differentialgeometrie. 2 Aufl. Leipzig, 1910. p. 41 és 66.

$$\begin{array}{llll}
(\bar n\,\bar r''_{uu}) = L, & (\bar n\,\bar r''_{uv}) = M, & (\bar n\,\bar r''_{vv}) = N, & (4_1) \\
(\bar r'_u\,\bar n'_u) = -L, & (\bar r'_u\,\bar n'_v) = (\bar r'_v\,\bar n'_u) = -M, & (\bar r'_v\,\bar n'_v) = -N, & (4_2) \\
\bar r''_{uu}\,[\bar r'_u\,\bar r'_v] = D\,L, & \bar r''_{uv}\,[\bar r'_u\,\bar r'_v] = D\,M, & \bar r''_{vv}\,[\bar r'_u\,\bar r'_v] = DN, & (4_3) \\
\bar r'_v\,[\bar r'_u\,\bar r''_{uu}] = -D\,L, & \bar r'_v\,[\bar r'_u\,\bar r''_{uv}] = -D\,M, & \bar r'_v\,[\bar r'_u\,\bar r''_{vv}] = -DN, & (4_4) \\
[\bar r'_u\,\bar r'_v]\,[\bar r'_u\,\bar r''_{uu}] = D^2 p, & [\bar r'_u\,\bar r'_v]\,[\bar r'_u\,\bar r''_{uv}] = D^2 p', & [\bar r'_u\,\bar r'_v]\,[\bar r'_u\,\bar r''_{vv}] = D^2 p'', & (5)^{\star} \\
[\bar r'_u\,\bar r'_v]\,[\bar r'_v\,\bar r''_{uu}] = D^2 q, & [\bar r'_u\,\bar r'_v]\,[\bar r'_v\,\bar r''_{uv}] = D^2 q', & [\bar r'_u\,\bar r'_v]\,[\bar r'_v\,\bar r''_{vv}] = D^2 q'', & (6)^{\star} \\
\bar n\,[\bar r'_u\,\bar r''_{uu}] = D\,p, & \bar n\,[\bar r'_u\,\bar r''_{uv}] = D\,p', & \bar n\,[\bar r'_u\,\bar r''_{vv}] = D\,p'', & (5_1) \\
\bar n\,[\bar r'_v\,\bar r''_{uu}] = D\,q, & \bar n\,[\bar r'_v\,\bar r''_{uv}] = D\,q', & \bar n\,[\bar r'_v\,\bar r'_{vv}] = D\,q''. & (6_1)
\end{array}$$

Ezen kifejezésekben

$$D^2 = [\bar r'_u\,\bar r'_v]^2 = E\,G - F^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

és

$$D\,\bar n = [\bar r'_u\,\bar r'_v] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

A 6. pont szétbontási szabálya szerint könnyen felírhatók a következő kapcsolatok:

$$\Big[\bar r'_u\,[\bar r'_u\,\bar r'_v]\Big] = F\,\bar r'_u - E\,\bar r'_v, \qquad \Big[\bar r'_v\,[\bar r'_u\,\bar r'_v]\Big] = G\,\bar r'_u - F\,\bar r'_v \qquad (9)$$

vagy

$$D\,[\bar r'_u\,\bar n] = F\,\bar r'_u - E\,\bar r'_v, \qquad D\,[\bar r'_v\,\bar n] \doteq G\,\bar r'_u - F\,\bar r'_v. \qquad (9_1)$$

Ha a paramétervonalak egymásra merőlegesek, ebből kapjuk:

$$[\bar r'_u\,\bar n] = -\sqrt{\frac{E}{G}}\,\bar r'_v, \qquad [\bar r'_v\,\bar n] = \sqrt{\frac{G}{E}}\cdot\bar r'_u.$$

A 6. pont (V.) alakja szerint:

$$\left.\begin{array}{l}
[\bar r'_u\,\bar r'_v]\,[\bar r''_{uu}\,\bar r''_{uv}] = m\,n' - m'\,n \\
[\bar r'_u\,\bar r'_v]\,[\bar r''_{uv}\,\bar r''_{vv}] = m'\,n'' - m''\,n' \\
[\bar r'_u\,\bar r'_v]\,[\bar r''_{vv}\,\bar r''_{uu}] = m''\,n - m\,n''
\end{array}\right\}\ \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

$$\left.\begin{array}{l}
[\bar r'_u\,\bar r'_v]\,[\bar r'_u\,\bar n'_u] = F\,L - E\,M \\
[\bar r'_u\,\bar r'_v]\,[\bar r'_u\,\bar n'_v] = F\,M - E\,N \\
[\bar r'_u\,\bar r'_v]\,[\bar r'_v\,\bar n'_u] = G\,L - F\,M \\
[\bar r'_u\,\bar r'_v]\,[\bar r'_v\,\bar n'_v] = G\,M - F\,N
\end{array}\right\}\ \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

---

* Az (5) és (6) formulái egyszerű összefüggésben vannak a másodrendű Christoffel-féle jelekkel

$$\left\{{1\,1 \atop 1}\right\} = -q, \qquad \left\{{1\,2 \atop 1}\right\} = -q', \qquad \left\{{2\,2 \atop 1}\right\} = -q'',$$

$$\left\{{1\,1 \atop 2}\right\} = p, \qquad \left\{{1\,2 \atop 2}\right\} = p', \qquad \left\{{2\,2 \atop 2}\right\} = p''.$$

Bianchi—Lukat: i. m. p. 42 és 66.

$$\left.\begin{aligned}\left[\bar{n}'_u\,[r'_u\,\bar{r}'_v]\right] &= L\,\bar{r}'_v - M\bar{r}'_u,\\ \left[\bar{n}'_v\,[\bar{r}'_u\,\bar{r}'_v]\right] &= M\bar{r}'_v - N\bar{r}'_u;\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots\ldots\;(12)$$

vagy ez utóbbiak más alakban

$$\left.\begin{aligned}D\,[\bar{n}'_u\,\bar{n}] &= L\,\bar{r}'_v - M\bar{r}'_u,\\ D\,[\bar{n}'_v\,\bar{n}] &= M\bar{r}'_v - N\bar{r}'_u,\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots\ldots\;(12_1)$$

$$[\bar{r}'_u\,\bar{r}'_v]\,[\bar{n}'_u\,\bar{n}'_v] = L\,N - M^2 = \triangle.\;\ldots\ldots\ldots\;(13)$$

A 6. pont szétbontási szabálya szerint:

$$\left.\begin{aligned}\left[\bar{r}''_{uu}\,[\bar{r}'_u\,\bar{r}'_v]\right] &= n\,\bar{r}'_u - m\,\bar{r}'_v = D\,[\bar{r}''_{uu}\,\bar{n}],\\ \left[\bar{r}''_{uv}\,[\bar{r}'_u\,\bar{r}'_v]\right] &= n'\,\bar{r}'_u - m'\,\bar{r}'_v = D\,[\bar{r}''_{uv}\,\bar{n}],\\ \left[\bar{r}''_{vv}\,[\bar{r}'_u\,\bar{r}'_v]\right] &= n''\,\bar{r}'_u - m''\,\bar{r}'_v = D\,[\bar{r}''_{vv}\,\bar{n}].\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots\;(14)$$

Ezen kifejezésekből további összefüggéseket a következő módon nyerhetünk. Differentiáljuk az (1) sor tagjait u, majd a v szerint, akkor a következő képleteket írhatjuk fel:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial E}{\partial u} = 2\,m, &&\frac{\partial F}{\partial u} = m' + n, &&\frac{\partial G}{\partial u} = 2\,n',\\ &\frac{\partial E}{\partial v} = 2\,m', &&\frac{\partial F}{\partial v} = n' + m'', &&\frac{\partial G}{\partial v} = 2\,n''.\end{aligned}\right\}\;(15)$$

Ezen összefüggésekből viszont

$$\left.\begin{aligned}&m = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}, &&m' = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}, &&m'' = \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u},\\ &n = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}, &&n' = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}, &&n'' = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}.\end{aligned}\right\}\;(16)$$

Alkalmazzuk most az (5) és (6) képleteire a 6. pont 3. alatt bebizonyított tételt, kapjuk a következő egyenleteket:

$$\left.\begin{aligned}&D^2 p = E\,n - F\,m, && D^2 p' = E\,n' - F\,m', && D^2 p'' = E\,n'' - F\,m''\\ &D^2 q = F\,n - G\,m, && D^2 q' = F\,n' - G\,m', && D^2 q'' = F\,n'' - G\,m''\end{aligned}\right\}(17)$$

Ezen egyenletekből

$$\left.\begin{aligned}&m = F\,p - E\,q, && m' = F\,p' - E\,q', && m'' = F\,p'' - E\,q'',\\ &n = G\,p - F\,q, && n' = G\,p' - F\,q', && n'' = G\,p'' - F\,q''.\end{aligned}\right\}\;\ldots\;(18)$$

A (17) vagy (18) csoportból egyszerű számítással nyerhető

$$\left.\begin{aligned}D^2\,(p\,q' - p'\,q) &= m\,n' - m'\,n,\\ D^2\,(p'\,q'' - p''\,q') &= m'\,n'' - m''\,n',\\ D^2\,(p''\,q - p\,q'') &= m''\,n - m\,n'',\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots\;(19)$$

továbbá

$$\left.\begin{aligned}
D^4(p'^2-pp'') &= E^2(n'^2-n\,n'')-EF(m\,n''-2\,m'\,n'+\\
&\quad+m''\,n)+F^2(m'^2-m\,m''),\\
D^4(q'^2-q\,q'') &= F^2(n'^2-n\,n'')-FG(m\,n''-2\,m'\,n'+\\
&\quad+m''\,n)+G^2(m'^2-m\,m''),\\
D^4(p'\,q'-p\,q'') &= EF(n'^2-n\,n'')-EG(m'\,n'-m''\,n)-\\
&\quad-F^2(m'\,n'-m\,n'')+FG(m'^2-m\,m''),\\
D^4(p'\,q'-p''\,q) &= E\,F(n'^2-n\,n'')-E\,G(m'n'-m\,n'')-\\
&\quad-F^2(m'\,n'-m''\,n)+FG(m'^2-m\,m'').
\end{aligned}\right\}\ldots\quad(20)$$

És ezek megfordításából

$$\left.\begin{aligned}
m'^2-m\,m'' &= F^2(p'^2-pp'')-EF(p\,q''-2\,p'\,q'+\\
&\quad+p''\,q)+E^2(q'^2-q\,q''),\\
n'^2-n\,n'' &= G^2(p'^2-pp'')-F\,G(p\,q''-2\,p'\,q'+\\
&\quad+p''\,q)+F^2(q'^2-q\,q''),\\
m'\,n'-m\,n'' &= FG(p'^2-p\,p'')-F^2(p'\,q'-p\,q'')-\\
&\quad-E\,G(p'\,q'-p''\,q)+E\,F(q'^2-q\,q''),\\
m'\,n'-m''\,n &= F\,G(p'^2-p\,p'')-F^2(p'\,q'-p''\,q)-\\
&\quad-E\,G(p'\,q'-p\,q'')+E\,F(q'^2-q\,q'').
\end{aligned}\right\}\ldots\quad(21)$$

A 6. pont 3. szabálya értelmében, figyelembe véve $\bar{n}\,\bar{r}'_u=0$ és $\bar{n}\,\bar{r}'_v=0$ egyenlőségeket, könnyű felírni ezen képleteket:

$$\left.\begin{aligned}
[\bar{n}\,\bar{n}'_u]\,[\bar{n}\,\bar{r}''_{uu}] &= \bar{n}'_u\,\bar{r}''_{uu},\\
[\bar{n}\,\bar{n}'_u]\,[\bar{n}\,\bar{r}''_{uv}] &= \bar{n}'_u\,\bar{r}''_{uv},\\
[\bar{n}\,\bar{n}'_u]\,[\bar{n}\,r''_{vv}] &= \bar{n}'_u\,\bar{r}''_{vv},\\
[\bar{n}\,\bar{n}'_v]\,[\bar{n}\,\bar{r}''_{uu}] &= \bar{n}'_v\,\bar{r}''_{uu},\\
[\bar{n}\,\bar{n}'_v]\,[\bar{n}\,\bar{r}'''_{uv}] &= \bar{n}'_v\,\bar{r}''_{uv},\\
[\bar{n}\,\bar{n}'_v]\,[\bar{n}\,r''_{vv}] &= \bar{n}'_v\,\bar{r}''_{vv}.
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(22)$$

A baloldali tényezők helyébe betéve a (12_1) és (14) alatti értékeket, kapjuk ezen összefüggéseket:

$$\left.\begin{aligned}
D^2(\bar{n}'_u\,\bar{r}''_{uu}) &= L(F\,n-G\,m)-M(E\,n-F\,m)=D^2(L\,q-M\,p),\\
D^2(\bar{n}'_u\,\bar{r}''_{uv}) &= L(F\,n'-G\,m')-M(E\,n'-F\,m')=\\
&= D^2(L\,q'-M\,p'),\\
D^2(\bar{n}'_u\,r''_{vv}) &= L(F\,n''-G\,m'')-M(E\,n''-F\,m'')=\\
&= D^2(L\,q''-M\,p''),\\
D^2(\bar{n}'_v\,\bar{r}''_{uu}) &= M(F\,n-G\,m)-N(E\,n-F\,m)=D^2(M\,q-N\,p),\\
D^2(\bar{n}'_v\,\bar{r}''_{uv}) &= M(F\,n'-G\,m')-N(E\,n'-F\,m')=\\
&= D^2(M\,q'-N\,p'),\\
D^2(\bar{n}'_v\,\bar{r}''_{vv}) &= M(F\,n''-G\,m'')-N(E\,n''-F\,m'')=\\
&= D^2(M\,q''-N\,p'').
\end{aligned}\right\}\quad(23)$$

A (2) és (3) sorok differentiálásából a következő kapcsolatok írhatók:

$$\frac{\partial m}{\partial v} - \frac{\partial m'}{\partial u} = \frac{\partial n'}{\partial v} - \frac{\partial n''}{\partial u} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \; (24)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial m''}{\partial u} - \frac{\partial m'}{\partial v} = \frac{\partial n}{\partial v} - \frac{\partial n'}{\partial u} = \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} = \\ = (r''_{uu}\,\bar{r}''_{vv}) - (\bar{r}''_{uv})^2 = \Gamma \end{aligned}\right\} \ldots \; (25)$$

Differentiáljuk most a

$$D^2 = [\bar{r}'_u\,\bar{r}'_v]\,[\bar{r}'_u\,\bar{r}'_v]$$

kifejezést u és v szerint, kapjuk

$$D\,D'_u = [\bar{r}'_u\,\bar{r}'_v]\,[\bar{r}''_{uu}\,\bar{r}'_v] + [\bar{r}'_u\,\bar{r}'_v]\,[\bar{r}'_u\,\bar{r}''_{uv}] = D^2\,(p' - q),$$
$$D\,D'_v = [\bar{r}'_u\,\bar{r}'_v]\,[\bar{r}''_{uv}\,\bar{r}'_v] + [\bar{r}'_u\,\bar{r}'_v]\,[\bar{r}'_u\,\bar{r}''_{vv}] = D^2\,(p'' - q');$$

honnan

$$D'_u = D\,(p' - q) \quad \text{és} \quad D'_v = D\,(p'' - q') \quad \ldots\ldots \; (26)$$

Ezen egyenletek más alakban is írhatók:

$$\frac{\partial \log D}{\partial u} = p' - q, \quad \frac{\partial \log D}{\partial v} = p'' - q'.$$

És ezen két egyenlőségből következik

$$\frac{\partial p'}{\partial v} - \frac{\partial q}{\partial v} = \frac{\partial p''}{\partial u} - \frac{\partial q'}{\partial u}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \; (27)$$

A (26) képleteiből következnek továbbá ezen egyenlőségek:

$$\left.\begin{aligned} & p'\,D'_u - p\,D'_v = D\,(p'^2 - p\,p'' + p\,q' - p'\,q) \\ & p''\,D'_u - p'\,D'_v = q'\,D'_u - q\,D'_v = D\,(p'\,q' - p''\,q) \\ & q''\,D'_u - q'\,D'_v = D\,(q'^2 - q\,q'' + p'\,q'' - p''\,q'). \end{aligned}\right\} \ldots \; (28)$$

A 6. pont (V.) formulája alapján írhatjuk továbbá

$$[\bar{n}\,\bar{r}''_{uu}]\,[\bar{n}\,\bar{r}''_{vv}] - [\bar{n}\,\bar{r}''_{uv}]\,[\bar{n}\,\bar{r}''_{uv}] = \Gamma - \triangle.$$

Ugyancsak a 6. pont 3. törvénye alapján írhatjuk a következő egyenlőségeket:

$$\left.\begin{aligned} & [\bar{r}'_u\,\bar{r}''_{uu}]\,[\bar{r}_u\,\bar{r}''_{vv}] - [\bar{r}'_u\,\bar{r}''_{uv}]\,[\bar{r}'_u\,\bar{r}''_{uv}] = E\,\Gamma + m'^2 - m\,m'' \\ & [\bar{r}'_u\,\bar{r}''_{vv}]\,[\bar{r}'_v\,\bar{r}''_{uu}] - [\bar{r}'_u\,\bar{r}''_{uv}]\,[\bar{r}'_v\,\bar{r}''_{uv}] = F\,\Gamma + m'\,n' - m\,n'' \\ & [\bar{r}'_v\,\bar{r}''_{uu}]\,[\bar{r}'_v\,\bar{r}''_{vv}] - [\bar{r}'_v\,\bar{r}''_{uv}]\,[\bar{r}'_v\,\bar{r}''_{uv}] = G\,\Gamma + n'^2 - n\,n''. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \; (29)$$

További, a p és q mennyiségek differentiálhányadosaira vonatkozó összefüggéseket a (17) csoportból kapunk, ha ezeket differentiáljuk és a (15) és (25) eredményeit felhasználjuk:

$$\frac{\partial\,(D^2 p)}{\partial v} - \frac{\partial\,(D^2 p')}{\partial u} = D^2 \left(\frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p'}{\partial u}\right) + 2\,D\,(p\,D'_v - p'\,D'_u) =$$
$$= E\,\Gamma + m'^2 - m\,m'' + 3\,(m'\,n - m\,n'),$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (D^2 p')}{\partial v} - \frac{\partial (D^2 p'')}{\partial u} &= D^2 \left(\frac{\partial p'}{\partial v} - \frac{\partial p''}{\partial u}\right) + 2 D (p' D'_v - p'' D'_u) = \\
&= F \Gamma + m'' n - 2 m n'' + m' n', \\
\frac{\partial (D^2 q)}{\partial v} - \frac{\partial (D^2 q')}{\partial u} &= D^2 \left(\frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q'}{\partial u}\right) + 2 D (q D'_v - q' D'_u) = \\
&= F \Gamma + m'' n - 2 m n'' + m' n', \\
\frac{\partial (D^2 q')}{\partial v} - \frac{\partial (D^2 q'')}{\partial u} &= D^2 \left(\frac{\partial q'}{\partial v} - \frac{\partial q''}{\partial u}\right) + 2 D (q' D'_v - q'' D'_u) = \\
&= G \Gamma + n'^2 - n n'' + 3 (m'' n' - m' n'').
\end{aligned}$$

Ezen összefüggésekből a (28)-at szem előtt tartva

$$\left.\begin{aligned}
D^2 \left(\frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p'}{\partial u}\right) &= 2 D^2 (p'^2 - p p'' + p q' - p' q) + \\
&\quad + E \Gamma + m'^2 - m m'' + 3 (m' n - m n'), \\
D^2 \left(\frac{\partial p'}{\partial v} - \frac{\partial p''}{\partial u}\right) &= 2 D^2 (p' q' - p'' q) + F \Gamma + m'' n - \\
&\quad - 2 m n'' + m' n', \\
D^2 \left(\frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q'}{\partial u}\right) &= 2 D^2 (p' q' - p'' q) + F \Gamma + m'' n - \\
&\quad - 2 m n'' + m' n', \\
D^2 \left(\frac{\partial q'}{\partial v} - \frac{\partial q''}{\partial u}\right) &= 2 D^2 (q'^2 - q q'' + p' q'' - p'' q') + \\
&\quad + G \Gamma + n'^2 - n n'' + 3 (m'' n' - m' n'').
\end{aligned}\right\} \dots (30)$$

További összefüggéseket a 6. pont 2. és 4. alapján a következőképen nyerhetünk. Fejtsük ki a

$$\Big[[\bar{n}\, \bar{r}''_{uu}] [\bar{r}'_u \bar{r}'_v] \Big] = - D \Big[\bar{n} [\bar{n}\, \bar{r}''_{uu}] \Big]$$

egyenlőség mindkét oldalát. Kapjuk ezen egyenlőséget

$$(\bar{r}'_v [\bar{n}\, \bar{r}''_{uu}])\, \bar{r}'_u - (\bar{r}'_u [\bar{n}\, \bar{r}''_{uu}])\, \bar{r}'_v = - D (\bar{n}\, \bar{r}''_{uu})\, \bar{n} + D\, \bar{r}''_{uu},$$

ebből a (14) alapján nyerjük

$$(E n - F m)\, \bar{r}'_v - (F n - G m)\, \bar{r} = - D^2 (\bar{n}\, \bar{r}''_{uu})\, \bar{n} + D^2\, \bar{r}''_{uu}.$$

Helyettesítsük ebbe a (17) és (4_1) eredményeit, kapjuk

$$\left.\begin{aligned}
\bar{r}''_{uu} &= p\, \bar{r}'_v - q\, \bar{r}'_u + L\, \bar{n}. \\
&\text{Hasonlókép nyerjük} \\
\bar{r}''_{uv} &= p'\, \bar{r}'_v - q'\, \bar{r}'_u + M\, \bar{n}, \\
\bar{r}''_{vv} &= p''\, \bar{r}'_v - q''\, \bar{r}'_u + N\, \bar{n}.
\end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (31)$$

Ezen képletekből kiszámíthatjuk a Γ értékét:

$$\begin{aligned}
\Gamma = \bar{r}''_{uu}\, \bar{r}''_{vv} - \bar{r}''^{\,2}_{uv} = E (q q'' - q'^2) - F (p p'' - 2 p' q' + q q'') + \\
+ G (p p'' - p'^2) + \triangle.
\end{aligned}$$

Továbbá a (31) alapján a $d^2 \bar{r}$-re kapjuk

$$\begin{aligned} d^2 \bar{r} = (p\, du^2 + 2\, p'\, du\, dv + p''\, dv^2)\, \bar{r}'_v - \\ - (q\, du^2 + 2\, q'\, du\, dv + q''\, dv^2)\, \bar{r}'_u + \\ + (L\, du^2 + 2\, M\, du\, dv + N\, dv^2)\, \bar{n}. \end{aligned}$$

Alkossuk meg a (31) alapján a következő vectorszorzatokat, tekintettel a (9_1) összefüggéseire:

$$\left.\begin{aligned} D\,[\bar{r}'_u\, \bar{r}''_{uu}] &= D^2 p\, \bar{n} + L\,(F \bar{r}'_u - E \bar{r}'_v) = D^2 p\, \bar{n} + D\, L\, [\bar{r}'_u\, \bar{n}], \\ D\,[\bar{r}'_u\, \bar{r}''_{uv}] &= D^2 p'\, \bar{n} + M\,(F \bar{r}'_u - E \bar{r}'_v) = D^2 p'\, \bar{n} + D\, M\, [\bar{r}'_u\, \bar{n}], \\ D\,[\bar{r}'_u\, \bar{r}''_{vv}] &= D^2 p''\, \bar{n} + N\,(F \bar{r}'_u - E \bar{r}'_v) = D^2 p''\, \bar{n} = D\, N [\bar{r}'_u\, \bar{n}], \\ D\,[\bar{r}'_v\, \bar{r}''_{uu}] &= D^2 q\, \bar{n} + L\,(G \bar{r}'_u - F \bar{r}'_v] = D^2 q\, \bar{n} + D\, L\, [\bar{r}'_v\, \bar{n}], \\ D\,[\bar{r}'_v\, \bar{r}''_{uv}] &= D^2 q'\, \bar{n} + M\,(G \bar{r}'_u - F \bar{r}'_v) = D^2 q'\, \bar{n} + D\, M [\bar{r}'_v\, \bar{n}], \\ D\,[\bar{r}'_v\, \bar{r}''_{vv}] &= D^2 q''\, \bar{n} + N\,(G \bar{r}'_u - F \bar{r}'_v) = D^2 q''\, \bar{n} + D\, N [\bar{r}'_v\, \bar{n}]. \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Ezekből továbbá kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} \big[\bar{n}\,[\bar{r}'_u\, \bar{r}''_{uu}]\big] &= L\, \bar{r}'_u, \\ \big[\bar{n}\,[\bar{r}'_u\, \bar{r}''_{uv}]\big] &= M \bar{r}'_u, \\ \big[\bar{n}\,[\bar{r}'_u\, \bar{r}''_{vv}]\big] &= N \bar{r}'_u, \\ \big[\bar{n}\,[\bar{r}'_v\, \bar{r}''_{uu}]\big] &= L\, \bar{r}'_v, \\ \big[\bar{n}\,[\bar{r}'_v\, \bar{r}''_{uv}]\big] &= M \bar{r}'_v, \\ \big[\bar{n}\,[\bar{r}'_v\, \bar{r}''_{vv}]\big] &= N \bar{r}'_v. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

Végül a (31) csoportból lehozhatók a felületelméletben *Codazzi-Mainardi* neve alatt ismeretes formulák:

$$\left.\begin{aligned} L'_v - M'_u &= \bar{n}'_v\, \bar{r}''_{uu} - \bar{n}'_u\, \bar{r}''_{uv} = - L\, q' + M\,(q + p') - N p, \\ \text{és} \qquad N'_u - M'_v &= \bar{n}'_u\, \bar{r}''_{vv} - \bar{n}'_v\, \bar{r}''_{uv} = N p' - M\,(q' + p'') + L\, q''. \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Ha az alapmennyiségek közül egyszerre $F = 0$ és $M = 0$, ezen egyenletekből kapjuk

$$\begin{aligned} L'_v &= - L\, q' - N p \\ N'_u &= N p' + L\, q''. \end{aligned}$$

Helyettesítve a (17) megfelelő értékeit és $D^2 = E\, G$ értékét

$$\begin{aligned} L'_v &= -\frac{L}{E}\, m' - \frac{N}{G}\, n, \\ N'_u &= \frac{N}{G}\, n' + \frac{L}{E}\, m''. \end{aligned}$$

Végül a (16) értékeit használva

$$\left.\begin{aligned} L'_v &= \frac{1}{2}\left(\frac{L}{E}+\frac{N}{G}\right) E'_v, \\ N'_u &= \frac{1}{2}\left(\frac{N}{G}+\frac{L}{E}\right) G'_u. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

33. A felületen húzható vonalak általában.

Mint láttuk, az $\bar r = F(u, v)$ felület egy P pontjából kiinduló irányt (du, dv) értékek viszonyával, vagy a $\varphi(u, v) = 0$, illetőleg a $\varphi'_u\, du + \varphi'_v\, dv = 0$ kapcsolattal jellemeztünk. Ezen utóbbi összefüggéssel voltaképp a felületen húzható vonal egyenletét adtuk meg. Ezen görbe egyenletét szintén az $\bar r = F(u, v)$ képviselje, csakhogy az u, v között itt még a $\varphi(u, v) = 0$ állandó összefüggés is fennáll. Ezen felületi vonal ívelemét ds-el jelöljük, és így ezen görbe P pontjához tartozó érintő, főnormalis és binormalis pedig

$$\left.\begin{aligned} \bar\tau &= \frac{d\bar r}{ds}, \\ \bar\nu &= \rho_1 \frac{d\,\bar\tau}{ds} = \rho_1 \frac{d^2\,\bar r}{ds^2}, \\ \bar\beta &= \rho_1 \left[\frac{d\bar r}{ds}, \frac{d^2\,\bar r}{ds^2}\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

egyenletekkel adható meg, ha egyszerűség kedvéért a görbe ívét veszszük független változónak. A felület normalisát a P pontban ismét $\bar n$-el jelöljük.

Ezek alapján pár összefüggést tudunk megállapitani.* Mindenekelőtt tekintsük a görbe főnormalisa és a felület normalisa között lévő ω szöget, erre nézve áll

$$\cos\omega = \bar\nu\,\bar n = \frac{\rho_1}{ds^2}\,\bar n\, d^2\,\bar r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

és

$$\sin\omega = \bar\beta\,\bar n = \frac{\rho_1}{ds^3}\,\bar n\,[d\bar r\, d^2\,\bar r|. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Ha ezen kifejezések elsőjébe

$$d^2\,\bar r = \bar r''_{uu}\, du^2 + 2\,\bar r''_{uv}\, du\, dv + \bar r''_{vv}\, dv^2,$$

másodikába

$$\begin{aligned} \bar n &= \xi\,\bar\varepsilon_1 + \eta\,\bar\varepsilon_2 + \xi\,\bar\varepsilon_3, \\ d\bar r &= dx\,\bar\varepsilon_1 + dy\,\bar\varepsilon_2 + dz\,\bar\varepsilon_3, \\ d^2\,\bar r &= d^2\,x\,\bar\varepsilon_1 + d^2\,y\,\bar\varepsilon_2 + d^2\,z\,\bar\varepsilon_3 \end{aligned}$$

---

* Kommerell V. u. K.: Allgemeine Theorie . . . I. B. 2. Aufl. 1909. p. 27.

helyettesítést végzünk, kapjuk

$$\cos \omega = \rho_1 \frac{L\, du^2 + 2\, M\, du\, dv + N\, dv^2}{E\, du^2 + 2\, F\, du\, dv + G\, dv^2} \quad \ldots\ldots \quad (2_1)$$

$$\sin \omega = \frac{\rho_1}{ds^2} \begin{vmatrix} \xi & \eta & \xi \\ dx & dy & dz \\ d^2 x & d^2 y & d^2 z \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3_1)$$

hol $L = \bar{n}\, \bar{r}''_{uu},\ M = \bar{n}\, \bar{r}''_{u}v,\ N = \bar{n}\, \bar{r}''_{vv}$ .... (4)

a *Gauss-féle másodrendű alapmennyiségek.* Az

$$\bar{n}\, \bar{r}'_u = 0 \text{ és } \bar{n}\, \bar{r}'_v = 0$$

kifejezéseknek u és v szerint vett differentiálásából kapjuk a másodrendű alapmennyiségeknek újabb

$$L = -\bar{n}'_u\, \bar{r}'_{u},\ M = -\bar{n}'_u\, \bar{r}'_v = -\bar{n}'_v\, \bar{r}'_u,\ N = -\bar{n}'_v\, \bar{r}'_v \quad \ldots \quad (5)$$

alakjait.

Visszatérve a (2) és (3) formulákhoz, látjuk ezekből, hogy

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{1}{ds} \frac{\bar{n}\, [d\bar{r}\, d^2\, \bar{r}]}{\bar{n}\, d^2\, \bar{r}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

és

$$\frac{1}{{\rho_1}^2} = \frac{ds^2\, (\bar{n}\, d^2\, \bar{r})^2 + \{\, \bar{n}\, [d\bar{r}\, d^2\, \bar{r}]\, \}^2}{ds^6} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Ha a felületi görbe binormalisa és a felület normalisa egybeesik, akkor $\omega = \frac{\pi}{2}$ és a (2)-ből kapjuk, ha $\rho_1 \neq 0$

$$\bar{n}\, d^2\, \bar{r} = L\, du^2 + 2\, M\, du\, dv + N\, dv^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Ezen feltétellel jelzett iránynak *asymptotikus irány* a neve és a (8) ennek differentiálegyenlete. Mint látjuk, általában két ily irány tartozik minden ponthoz. Ha mindkét irány valós, tehát

$$L\, N - M^2 < 0,$$

akkor a pontot *hyperbolikusnak* mondjuk, ha a két irány egybeesik, azaz

$$L\, N - M^2 = 0,$$

akkor *parabolikusnak* mondjuk, ha pedig a két asymptotikus irány képzetes, akkor *elliptikus* pontnak nevezzük,* ez utóbbinak feltétele

$$L\, N - M^2 > 0.$$

A (8) feltételt még

$$d\bar{n}\, d\bar{r} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8_1)$$

alakban is írhatjuk. Ezt úgy kapjuk, hogy az $\bar{n}\, d\bar{r} = 0$ összefüggést differentiáljuk és a (8) feltételt helyettesítjük.

---

* Lásd a 31. pont végét.

Ha a felület egy pontjából az asymptotikus irány mentén egy szomszédos pontig haladunk, innen ismét az asymptotikus irányban, akkor a felületen leírt folytonos vonalat *asymptotikus vonalnak* nevezzük. A (8), illetőleg a (8_1) az asymptotikus vonalnak is differentiálegyenlete.

Látjuk továbbá, hogy a (3) szerint, ha $\rho_1 \mp 0$, és $d\bar{r} \mp 0$ az

$$\bar{n}\,[d\bar{r}\,d^2\,\bar{r}] = \begin{vmatrix} \xi & \eta & \xi \\ dx & dy & dz \\ d^2\,x & d^2\,y & d^2\,z \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

egyenlőség szükséges és elégséges feltétele annak, hogy a felület normalisa és a görbe főnormalisa egybeessék. A felület ezen vonalait *geodetikus vonalaknak* nevezzük, a (9) tehát a geodetikus vonalak differentiálegyenlete. Ez esetben a (2)-ből

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\bar{n}\,d^2\,\bar{r}}{ds^{\,2}}.$$

Ha azonban a (3) egyenlőségben a $d\bar{r} = 0$, vagyis a felületi görbe radius-vectorának változása magasabb rendű végtelen kicsi, akkor $\omega = 0$ és ez esetben a görbét *normalis metszetnek* hívjuk, mert a görbe simuló síkja a felület normalisán megy keresztül. Ha ezen normalis metszet görbületi sugarát R-el jelöljük, a (2)-ből ered:

$$\frac{1}{R} = \frac{\bar{n}\,d^2\,\bar{r}}{ds^2} = \frac{L\,du^2 + 2\,M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Ezen eredményt összevetve a (2)-vel, kapjuk ugyanazon du, dv kapcsolat mellett:

$$R\cos\omega = \rho_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Ezen egyenlet *Meusnier* tételét fejezi ki, mely szerint, ha a felület egy érintőjén keresztül normalis síkmetszetet és ferde síkmetszetet alkalmazunk, az utóbbin létrejövő görbe görbületi sugarát megkapjuk, ha a normalis metszet görbéjének sugarát a ferde síkra vetítjük. Vagy máskép: a felület egy érintőjén átfektetett síkmetszetek görbéinek görbületi középpontja egy körön fekszik, melynek síkja merőleges a felület adott érintőjére, sugara pedig a normalis metszet görbületi sugarával egyenlő. Ebből még az is látható, hogy ugyanazon érintő síkmetszetei közül a normalis metszetnek van a legnagyobb görbületi sugara.

A felületi görbe torsióját a következőkép határozhatjuk meg. Differentiáljuk a (3) kifejezést és alkalmazzuk a Frenet-formulát:

$$\cos\omega\,d\omega = \frac{\bar{\nu}\,\bar{n}}{\rho_2}\,ds + d\,\bar{n}\,[\bar{\tau}\,\bar{\nu}] =$$

$$= \frac{\bar{\nu}\,\bar{n}}{\rho_2}\,ds + \frac{\rho_1}{ds^3}\,d\bar{n}\,[d\bar{r}\,d^2\bar{r}],$$

de $\bar{\nu}\,\bar{n} = \cos\omega = \frac{\rho_1}{ds^3}(ds\,\bar{n}\,d^2\bar{r})$ figyelembe vételével írható

$$d\,\omega = \frac{ds}{\rho_2} + \frac{1}{ds}\,\frac{d\bar{n}\,[d\bar{r}\,d^2\bar{r}]}{\bar{n}\,d^2\bar{r}}$$

és így

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{d\omega}{ds} - \frac{1}{ds^2}\cdot\frac{d\bar{n}\,[d\bar{r}\,d^2\bar{r}]}{\bar{n}\,d^2\bar{r}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Ezen kifejezésből kapjuk a geodetikus vonalakra, hol $\omega = 0$ állandó

$$\frac{1}{\rho'_2} = -\frac{d\bar{n}\,[d\bar{r}\,d^2\bar{r}]}{ds^2\,\bar{n}\,d^2\bar{r}}$$

és ezt *geodetikus torsionak* is mondjuk. Ezen kifejezést még egyszerűsíthetjük. Áll ugyanis ezen egyenlőség

$$(\bar{n}\,d^2\bar{r})\,(\bar{n}\,[d\bar{n}\,d\bar{r}]) = d\bar{n}\,[d\bar{r}\,d^2\bar{r}] = d^2\bar{r}\,[d\bar{n}\,d\bar{r}] \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

Ezen egyenlőség bizonyítása a következő. Tegyük $|d\bar{r}| = ds$; $|d\bar{n}| = ds_1$ és nevezzük a $d\bar{r}$ és $d\bar{n}$ által bezárt szöget α-val. Mivel $d\bar{r}$ és $d\bar{n}$ merőlegesek a normalisra, kapjuk tehát

$$[d\bar{n}\,d\bar{r}] = \pm\,ds\,ds_1 \sin\alpha\,\bar{n},$$

ebből

$$\bar{n}\,[d\bar{n}\,d\bar{r}] = \pm\,ds\,ds_1 \sin\alpha$$

és

$$d^2\bar{r}\,[d\bar{n}\,d\bar{r}] = \pm\,ds\,ds_1 \sin\alpha\,(\bar{n}\,d^2\bar{r}).$$

E kettő összefoglalásából kapjuk a (13) egyenlőséget. A (13) alapján pedig

$$\frac{1}{\rho_2'} = \frac{\bar{n}\,[d\bar{r}\,d\bar{n}]}{ds^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Helyettesítsük ezen kifejezésbe

$$d\bar{r} = \bar{r}'_u\,du + \bar{r}'_v\,dv$$

és

$$d\bar{n} = \bar{n}'_u\,du + \bar{n}'_v\,dv$$

értékeket, kapjuk

$$\frac{1}{\rho_2'} = \frac{[\bar{r}'_u\,\bar{n}'_u]\,du^2 + \{[\bar{r}'_u\,\bar{n}'_v] + [\bar{r}'_v\,\bar{n}'_u]\}\,du\,dv + [\bar{r}'_v\,\bar{n}'_v]\,dv^2}{ds^2}\,\bar{n}.$$

Ebből továbbá kapjuk* [l. 32. pont (11)]

$$\frac{1}{\rho_2'} = \frac{(F\,L - E\,M)\,du^2 + (G\,L - E\,N)\,du\,dv + (G\,M - F\,N)\,dv^2}{D\,ds^2} \quad (15)$$

---

* Bianchi—Lukat: Vorlesungen über Differentialgeometrie. 2 Aufl. 1910. Teubner. p. 164.

Ha a paramétervonalak egymásra merőlegesek, az esetben $F = 0$ és $D = \sqrt{E\,G}$, a (15)-ből tehát kapjuk

$$\frac{1}{\rho_2{}'} = \frac{-E\,M\,du^2 + (G\,L - E\,N)\,du\,dv + G\,M\,dv^2}{\sqrt{E\,G}\,(E\,du^2 + G\,dv^2)}.$$

Ebből kapjuk, hogy a $v = \text{const.}$ paramétervonal geodetikus torsiója $\gamma_u = -\frac{M}{\sqrt{E\,G}}$, a reá merőleges $u = \text{const.}$ paramétervonalé pedig $\gamma_v = \frac{M}{\sqrt{E\,G}}$, tehát $\gamma_v = -\gamma_u$. Mivel a felület bármely két, egymásra merőleges vonalelemét választhatjuk paramétervonalaknak, levezetett egyenlőségünkből következik ezen tétel: A felület egymásra merőleges vonalelemeinek geodetikus torsiója absolut értékben megegyezik, de előjelük különböző.

Vizsgáljuk most a görbe érintőjének változását. A Frenet-féle formula felhasználásával

$$d\,\bar{\tau} = \frac{\bar{\nu}}{\rho_1}\,ds.$$

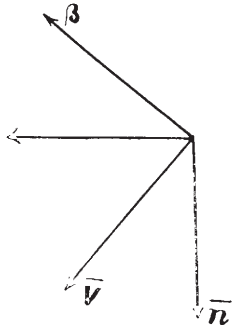
Vetítsük ezen változást a felület normalisára és érintő síkjára.* Első esetben kapjuk

$$d\,\bar{\tau}\,\bar{n} = \frac{\bar{\nu}\,\bar{n}}{\rho_1}\,ds$$

és ebből

$$\frac{d\,\bar{\tau}\,\bar{n}}{ds} = \frac{\cos\omega}{\rho_1} = \frac{1}{R}.$$

Ezen kifejezéssel megkapjuk a normalis metszet görbületét, vagy másképp a *normalis görbületet.*



25. ábra.

Az érintősíkra való vetületnél úgy járhatunk el, hogy a görbe binormalisát vetítjük a felület normalisára. Ez esetben a kívánt vetület

$$|\,d\,\bar{\tau}\,|\,\bar{\beta}\,\bar{n} = \frac{ds}{\rho_1}\,\bar{\beta}\,\bar{n}.$$

Ezen változásnak viszonya az ívelemhez

$$\frac{|\,d\,\bar{\tau}\,|\,\bar{\beta}\,\bar{n}}{ds} = \frac{\sin\omega}{\rho_1} = \frac{\bar{n}\,[d\bar{r}\,d^2\,\bar{r}]}{ds^3} = \frac{1}{g_1}. \qquad (16)$$

Az $\frac{1}{g_1}$-et *érintői görbületnek*, vagy *geode-*

---

* Bianchi—Lukat: Vorlesungen über Differentialgeometrie. 2 Aufl. 1910. Teubner. p. 144. — Cesàro E.—Kowalewski G.: Elementares Lehrbuch... Teubner. 1904. p. 656.

tikus görbületnek hívjuk. Ez utóbbi elnevezés onnan származik, hogy az $\frac{1}{g_1}$ a geodetikus vonalaknál eltünik, mint a (9)-ból látható.

A (7)-ből továbbá könnyű látni a következő tételt: Ha a felületi görbe asymtotikus vonal és geodetikus vonal egyszerre, akkor $\frac{1}{\rho_1} = 0$, vagyis egyenes.

A geodetikus görbületnek kissé más alakot is adhatunk. A (16) alapján ugyanis írható

$$\frac{1}{g_1} = \frac{[\bar{r}'_u \bar{r}'_v] [d\bar{r}\, d^2 \bar{r}]}{D\, ds^3},$$

vagy a jobboldalt a 6. pont (III.) képlete szerint kifejtve

$$\frac{1}{g_1} = \frac{(\bar{r}'_u\, d\bar{r})\, (\bar{r}'_v\, d^2 \bar{r}) - (\bar{r}'_v\, d\bar{r})\, (\bar{r}'_u\, d^2 \bar{r})}{D\, ds^3}.$$

Helyettesítve a

$$d\bar{r} = \bar{r}'_u\, du + \bar{r}'_v\, dv$$

és

$$d^2 \bar{r} = \bar{r}''_{uu}\, du^2 + 2\, \bar{r}''_{uv}\, du\, dv + \bar{r}''_{vv}\, dv^2$$

értékeit a 32. pont (1), (2) és (3) alapján

$$\frac{1}{g_1} = \frac{\begin{array}{c}(E\, du + F\, dv)\, (n\, du^2 + 2\, n'\, du\, dv + m''\, dv^2) - (F\, du + \\ + G\, dv)\, (m\, du^2 + 2\, m'\, du\, dv + m''\, dv^2)\end{array}}{D\, ds^3}, .$$

Végezzük el ezen kifejezésben a szorzást, rendezés és a 32. pont (17) értékeinek helyettesítésével

$$\frac{1}{g_1} = D \frac{\begin{array}{c}(p\, du^2 + 2\, p'\, du\, dv + p''\, dv^2)\, du + (q\, du^2 + 2\, q'\, du\, dv + \\ + q''\, dv^2)\, dv\end{array}}{(E\, du^2 + 2\, F\, du\, dv + G\, dv^2)^{3/2}}. \quad (17)$$

Ebből egyúttal kapjuk a geodetikus vonalak differentiálegyenletét.

$$\begin{array}{c}(p\, du^2 + 2\, p'\, du\, dv + p''\, dv^2)\, du + (q\, du^2 + 2\, q'\, du\, dv + \\ + q''\, dv^2)\, dv = 0.\end{array}$$

Ez kifejtett alakja a (9) feltételnek.

Megállapíthatjuk továbbá azon felületi vonalak egyenletét, melyek a paraméter-vonalakat állandó szög alatt metszik. Pl. ha a $v =$ const. paramétervonalakat ω szög alatt szeljük, az így létrejövő trajectoria vonaleleme legyen $d\bar{r} = \bar{r}'_u\, du + \bar{r}'_v\, dv$. A trajectoria egyenlete

$$d\bar{r}\, \bar{r}'_u = |\, d\bar{r}\,|\, |\, \bar{r}'_u\,| \cos \omega$$

lesz. Ha figyelembe veszszük, hogy az $|\,[d\bar{r}\, \bar{r}'_u]\,|$ absolut értékben is $|d\bar{r}|$ és $|\bar{r}'_u|$ szerepel és még $\sin \omega$, akkor írhatjuk

$$d\bar{r}\, \bar{r}'_u = |\,[d\bar{r}, \bar{r}'_u]\,| \operatorname{ctg} \omega,$$

ezen egyenlet mindkét oldalán helyettesítve $d\bar{r} = \bar{r}'_u\, du + \bar{r}'_v\, dv$ értékét kapjuk

$$\bar{r}'^2_u\, du + \bar{r}'_u\, \bar{r}'_v\, dv = |\, [\bar{r}'_v\, \bar{r}'_u]\, |\, dv \operatorname{ctg} \omega$$

vagy szokásos jelöléseinkben

$$E\, du + (F - D \operatorname{ctg} \omega)\, dv = 0,$$

a $v =$ const. paramétervonalak ω szög alatt hajló trajectoriái.

Ugyanezen paramétervonalak derékszögű trajectoriái az

$$E\, du + F\, dv = 0$$

differentiálegyenletet elégítik ki.*

Ugyanígy kapjuk, hogy az $u =$ const. paramétervonalak ω szögű, illetőleg derékszögű trajectoriáinak differentiálegyenlete:

$$(F - D \operatorname{ctg} \omega)\, du + G\, dv = 0$$

$$F\, du + G\, dv = 0 \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (18)$$

Pl. az a sugarú gömb egyenlete, ha a földrajzi hosszúságot u, a szélességet v paraméterrel jelöljük

$$\bar{r} = a \cos u \cos v\, \bar{\varepsilon}_1 + a \sin u \cos v\, \bar{\varepsilon}_2 + a \sin v\, \bar{\varepsilon}_3,$$

ebből

$$E = a^2 \cos^2 v, \quad F = 0, \quad G = a^2$$

$$D = a^2 \cos v.$$

Az $u =$ const. vonalakat, tehát a meridiánokat állandó ω szög alatt metsző görbéknek, a loxodromoknak differentiálegyenlete

$$- \cos v \operatorname{ctg} \omega\, du + dv = 0,$$

ebből

$$\log \operatorname{tg} \left(\frac{1}{4} \pi + \frac{x}{2} \right) + l\, C = u \operatorname{ctg} \omega$$

vagy másképp

$$C \operatorname{tg} \left(\frac{1}{4} \pi + \frac{x}{2} \right) = e^{u \operatorname{ctg} \omega}.$$

34. A főgörbületi irányok.

Az előző pontban láttuk, hogy normalis metszet esetében a görbületi mérték

$$\frac{1}{R} = \frac{\bar{n}\, d^2 \bar{r}}{ds^2} = \frac{L\, du^2 + 2\, M\, du\, dv + N\, dv^2}{E\, du^2 + 2\, F\, du\, dv + G\, dv^2} \; \ldots\ldots\ldots \; (1)$$

Vizsgáljuk most, hogy változik a normalis metszet görbületi sugara a $(du\,|\,dv)$ kapcsolattal jelzett érintő irányának változásával? E czélból

---

* Burali—Forti ......: Éléments de calcul vectoriel. p. 99.

írjunk az (1) kifejezésben a változó $\frac{du}{dv}$ viszony helyett λ betüt és így*

$$\frac{1}{R}=\frac{L\lambda^2+2M\lambda+N}{E\lambda^2+2F\lambda+G}.$$

A görbületre szélső értéket kapunk, ha $\left(\frac{1}{R}\right)$-nek λ szerint vett differentiálhányadosa eltünik, vagyis, ha

$$(E\lambda^2+2F\lambda+G)(L\lambda+M)-(L\lambda^2+2M\lambda+N)(E\lambda+F)=0$$

vagy ebből egyszerübben

$$\begin{vmatrix} F\lambda+G & M\lambda+N \\ E\lambda+F & L\lambda+M \end{vmatrix}=0\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;(2)$$

Látjuk tehát, hogy két oly $\lambda=\frac{du}{dv}$ irány van, melyben a görbületi sugár szélső értéket vesz fel. Ezen irányok a *főgörbületi irányok*, vagy folytonos vonallá összetéve adják a felület *görbületi vonalait* és (2) ennek a differentiálegyenlete, melyet kifejtve írhatunk

$$(FL-EM)\,du^2+(GL-EN)\,du\,dv+(GM-FN)\,dv^2=0\quad(3)$$

alakban is. Helyettesítsük ezen kifejezésbe a 32-ik pont (11) képleteiből nyerhető értékeket:

$$D\,\overline{n}\,[\overline{r}'_u\,du,\;\overline{n}'_u\,du]+D\,\overline{n}\,[\overline{r}'_u\,du,\;\overline{n}'_v\,dv]+D\,\overline{n}\,[\overline{r}'_v\,dv,\;\overline{n}'_u\,du]+$$
$$+D\,\overline{n}\,[\overline{r}'_v\,dv,\;\overline{n}'_v\,dv]=0,$$

s ebből összevonás után, a főgörbületi irányok differentiálegyenlete

$$\overline{n}\,[d\overline{r}\,d\overline{n}]=0\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;(4)$$

Ha ezen eredményt összevetjük az előző pont (14) képletével, mondhatjuk, hogy a görbületi vonal minden pontjában a geodetikus torsió eltünik.

A (4) egyenlet azt fejezi ki, hogy a benne előforduló három vector egy síkban fekszik. Helyette írhatjuk még

$$\overline{n}\,[d\overline{r},\;\overline{n}+d\overline{n}]=0,$$

a mi azt mutatja, hogy főirányban két szomszédos normalis metszi egymást, vagyis görbületi vonalak mentén a normalis lefejthető felületet, a *polaris felületet* burkolja be.

Ha a (2) egyenlet két gyöke λ_1 és λ_2, akkor a hozzájuk tartozó görbületi sugarat így kapjuk meg. A determinans helyett írjuk

---

* Knoblauch J.: Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen. Teubner. 1888. p. 30.
Scheffers G.: Anwendung... II. B. 1902. p. 109.

$$\frac{L\lambda+M}{E\lambda+F}=\frac{M\lambda+N}{F\lambda+G}=\frac{L\lambda^2+2M\lambda+N}{E\lambda^2+2F\lambda+G}=\frac{1}{R}$$

vagy ebből

$$\lambda=\frac{F-RM}{RL-E}.$$

Helyettesítsük ezen értéket a λ egyenletébe, rendezés után kapjuk

$$(LN-M^2)\,R^2-(EN-2FM+GL)\,R+EG-F^2=0 \;..\; (5)$$

Ezen egyenletből nyerhető a két főgörbület, mit R_1 és R_2-vel jelölünk.

A főgörbületi sugaraknak symmetrikus függvényei ezen kifejezések:

$$H=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{EN-2FM+GL}{EG-F^2} \;..........\; (6)$$

$$K=\frac{1}{R_1R_2}=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{\triangle}{D^2} \;.............\; (7)$$

Ezek közül a H-t *középgörbületnek*, a K-t pedig *görbületi mértéknek* mondjuk.

Ezen kifejezések a 32. pont (11) és (13) képletei alapján írhatók még

$$H=\frac{\overline{n}\,[\overline{r}'_v\,\overline{n}'_u]-\overline{n}\,[\overline{r}'_u\,\overline{n}'_v]}{D} \;.............\; (6_1)$$

$$K=\frac{\overline{n}\,[\overline{n}'_u\,\overline{n}'_v]}{D} \;..................\; (7_1)$$

alakban is.

Ha a felület paraméter-vonalai a főgörbületi vonalak, az esetben, mint látni fogjuk $F=0$ és $M=0$. Ekkor kapjuk az (5) egyenletből

$$LNR^2-(EN+GL)R+EG=0$$

vagy helyette

$$(NR-G)(LR-E)=0$$

és ebből

$$\frac{1}{R_1}=\frac{L}{E},\quad \frac{1}{R_2}=\frac{N}{G},$$

$$K=\frac{LN}{EG},\quad H=\frac{EN+GL}{EG}.$$

A felület görbületi vonalaihoz tartozó görbületi középpontok az úgynevezett *evoluta-felületet* vagy *centralis felületet* szolgáltatják.* Ezen felületek egyenlete

---

* Lásd a 38. pontot.

$$Q_1 = P + R_1 \bar{n}$$

és

$$Q_2 = P + R_2 \bar{n}.$$

A főgörbületi irányok differentiálegyenletét a (4)-től eltérő alakban is kifejezhetjük. Tudjuk ugyanis, hogy a $d\bar{r}$ és $d\bar{n}$ merőleges a normalisra, az utóbbi azért, mert $d\bar{n}$ változása az egységnyi $\bar{n}$ vectornak. A (4) alapján pedig e három vector egy síkkal párhuzamos, a mi csak úgy lehetséges, ha $d\bar{n}$ és $d\bar{r}$ párhuzamosak. A (4) helyett tehát írhatjuk

$$d\bar{n} = l\, d\bar{r}, \; . \; . \; . \; , \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

hol l az u és v-től függő scalaris együttható. Ezen egyenletből kapjuk $d\bar{n}\, d\bar{r} = l\, ds^2$, összevetve ezt az (1)-ből nyerhető

$$\frac{1}{R} = -\frac{d\bar{n}\, d\bar{r}}{ds^2}$$

összefüggéssel, kapjuk $l = -\frac{1}{R}$. A (8) alapján a főgörbületi irány esetében áll tehát a *Rodriguez*-féle formula:

$$d\bar{n} = -\frac{1}{R}\, d\bar{r}. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

Szétbontva ezen kifejezést, kapjuk

$$\left(\frac{1}{R}\bar{r}'_u + \bar{n}'_u\right) du + \left(\frac{1}{R}\bar{r}'_v + \bar{n}'_v\right) dv = 0.$$

Szorozzuk meg ezen kifejezést vectorképen $\frac{1}{R}\bar{r}'_v + \bar{n}'_v$-vel, adódik

$$\frac{1}{R^2}[\bar{r}'_u\, \bar{r}'_v] + \frac{1}{R}\left\{[\bar{r}'_u\, \bar{n}'_v] - [\bar{r}'_v\, \bar{n}'_u]\right\} + [\bar{n}'_u\, \bar{n}'_v] = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5_1)$$

Ezen egyenlőség lényegben az (5) kifejezéssel egyezik.

Mint tudjuk, a felület minden pontjához két főgörbületi irány tartozik, mely eleget tesz a (9) egyenletnek. Válaszszuk most ezen két irányt paraméter-vonalnak, változó paraméter legyen az ív s_1 és s_2. Ez esetben a (9)-ből kapjuk

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\bar{n}}{ds_1} &= -\frac{1}{R_1}\frac{d\bar{r}}{ds_1} \\ \text{és} \quad \frac{d\bar{n}}{ds_2} &= -\frac{1}{R_2}\frac{d\bar{r}}{ds_2}. \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

A 32. pont (4_2) alapján továbbá írhatjuk

$$-M = \frac{d\bar{r}}{ds_1}\frac{d\bar{n}}{ds_2} = \frac{d\bar{r}}{ds_2} \cdot \frac{d\bar{n}}{ds_1}. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Helyettesítve e kapcsolatba a (10) szolgáltatta értékeket kapjuk

$$\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\frac{d\bar{r}}{ds_1} \cdot \frac{d\bar{r}}{ds_2} = 0.$$

Ezen egyenlőségből látjuk, ha $R_1 \neq R_2$, hogy a főgörbületi irányok egymásra merőlegesek, mert

$$\frac{d\bar{r}}{ds_1} \cdot \frac{d\bar{r}}{ds_2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Ez esetben a (11)-ből lesz:

$$\frac{d\bar{r}}{ds_1} \cdot \frac{d\bar{n}}{ds_2} = \frac{d\bar{r}}{ds_2} \cdot \frac{d\bar{n}}{ds_1} = -M = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

ha tehát a görbületi vonalak a paraméter-vonalak, akkor $M = 0$ és egyúttal $F = 0$, mert a főgörbületi irányok egymásra merőlegesek.

Tetszésszerinti normalis metszet görbületét a következőkép tudjuk kifejezni az ugyanazon ponthoz tartozó főgörbületekkel. Az (1) alapján

$$\frac{1}{R} = -\frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{d\bar{n}}{ds},$$

kifejezve ezt a paraméterek segítségével

$$\frac{1}{R} = -\left(\frac{d\bar{r}}{ds_1}\frac{ds_1}{ds} + \frac{d\bar{r}}{ds_2}\frac{ds_2}{ds}\right)\left(\frac{d\bar{n}}{ds_1}\frac{ds_1}{ds} + \frac{d\bar{n}}{ds_2}\frac{ds_2}{ds}\right).$$

A (13) szem előtt tartásával a szorzás eredménye lesz

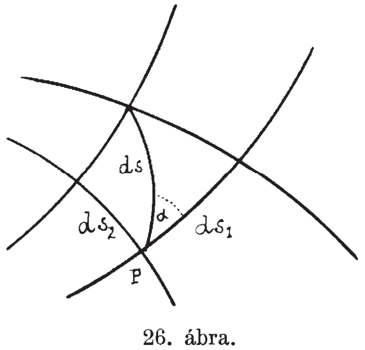
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1}\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 + \frac{1}{R_2}\left(\frac{ds_2}{ds}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Mivel előbbi tételünk szerint ds_1 és ds_2 egymásra merőleges, ha ds ívelem α szöget zár be ds_1-el, akkor

$$\frac{ds_1}{ds} = \cos\alpha \text{ és } \frac{ds_2}{ds} = \sin\alpha$$

és így a (14)-ből lesz

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\alpha}{R_1} + \frac{\sin^2\alpha}{R_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$



26. ábra.

Ezen összefüggést *Euler* egyenletének nevezzük. Egy másik irányhoz tartozó normális metszetnél

$$\frac{1}{R'} = \frac{\cos^2\alpha'}{R_1} + \frac{\sin^2\alpha'}{R_2}.$$

Az esetben, ha $\alpha' = 90^\circ + \alpha$, kapjuk

$$\frac{1}{R'} = \frac{\sin^2\alpha}{R_1} + \frac{\cos^2\alpha}{R_2}$$

összekapcsolva a (15)-el:

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

A felület egy pontjában tehát az egymásra merőleges normalis metszetek görbületének összege állandó és egyenlő azon ponthoz tartozó főgörbületek összegével.

35. A $\varphi(u, v) = \text{const.}$ egyenlettel adott felületi vonal.

Ha a felületi görbe egyenletét $\varphi(u, v) = \text{const.}$ alakban ismerjük, ebből kapjuk

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

A vonal irányát jelző $(du\, dv)$ kapcsolat tehát ezen egyenlettel adva van.* Az (1)-ből kapjuk

$$du = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial v} \text{ és } dv = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

hol λ valamely infinitesimalis arányossági tényező. A (2) felhasználásával megállapíthatjuk a $\varphi(u, v) = \text{const.}$ görbéhez tartozó differentiál-formákat. Pl. a görbe íveleme

$$d\bar{r} = \lambda (\bar{r}'_u \varphi'_v - \bar{r}'_v \varphi'_u), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

ennek négyzete

$$ds^2 = \lambda^2 (E \varphi_v'^2 - 2 F \varphi'_u \varphi'_v + G \varphi_u'^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Az ívelem differentiáléja

$$d^2 \bar{r} = \lambda^2 (\bar{r}''_{uu} \varphi_v'^2 - 2 \bar{r}''_{uv} \varphi'_u \varphi'_v + \bar{r}''_{vv} \varphi_u'^2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Szorozva ezen egyenlőséget a felület normalisának vectorával $\bar{n}$-el,

$$\bar{n}\, d^2 \bar{r} = \lambda^2 (L \varphi_v'^2 - 2 M \varphi'_u \varphi'_v + N \varphi_u'^2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Hasonló módon a normalis differentiáléja

$$d\bar{n} = \lambda (\bar{n}'_u \varphi'_v - \bar{n}'_v \varphi'_u) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

A 33. pont (10) képlete alapján írhatjuk

$$\frac{1}{R} = \frac{L \varphi_v'^2 - 2 M \varphi'_u \varphi'_v + N \varphi_u'^2}{E \varphi_v'^2 - 2 F \varphi'_u \varphi'_v + G \varphi_u'^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

és ezen kifejezés a felület azon normalis metszetének a görbületét szolgáltatja, mely a $\varphi(u, v) = \text{const.}$ görbe ívelemén halad át.

Az adott görbe geodetikus torsiója pedig a 33. pont (15) képlete szerint

$$\frac{1}{\rho_2'} = \frac{(FL - EM) \varphi_v'^2 - (GL - EN) \varphi'_u \varphi'_v + (GM - FN) \varphi_u'^2}{D (E \varphi_v'^2 - 2 F \varphi'_u \varphi'_v + G \varphi_u'^2)} \quad \ldots \quad (9)$$

a geodetikus görbület pedig a (17) formula szerint ily alakú lesz

---

* Kommerell V. u. K.: Allgemeine Theorie ... I. B. 2. Aufl. 1909. p. 154. II. B. 1903. p. 97.

$$\frac{1}{g_1}=D\frac{(p\varphi_v'^2-2p'\varphi_u'\varphi_v'+p''\varphi_u'^2)\varphi_v'-(q\varphi_v'^2-2q'\varphi_u'\varphi_v'+q''\varphi_u'^2)\varphi_u'}{(E\varphi_v'^2-2F\varphi_u'\varphi_v'+G\varphi_u'^2)^{3/2}} \quad (10)$$

Ezek után megállapíthatjuk annak feltételét, mely mellett a $\varphi(u, v) = \text{const.}$ vonal asymptotikus görbét jelent. Ennek feltétele ugyanis $\bar{n}\, d^2 \bar{r} = 0$ alapján

$$L\varphi_v'^2 - 2M\varphi_u'\varphi_v' + N\varphi_u'^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Annak feltétele pedig, hogy ezen vonal geodetikus görbét adjon, a (10) alapján a következő lesz

$$(p\varphi_v'^2-2p'\varphi_u'\varphi_v'+p''\varphi_u'^2)\varphi_v'-(q\varphi_v'-2q'\varphi_u'\varphi_v'+q''\varphi_u'^2)\varphi_u'=0 \quad (12)$$

Végül, hogy a $\varphi(u, v) = \text{const.}$ vonal a felület görbületi vonala legyen, az előző pont (3) képletéből kapjuk ezen feltételt

$$(FL-EM)\varphi_v'^2-(GL-EN)\varphi_u'\varphi_v'+(GM-FN)\varphi_u'^2=0 \quad \ldots (13)$$

Ha még a $\varphi(u, v) = \text{const.}$ mellett egy másik $\psi(u, v) = \text{const.}$ vagy

$$\psi_u'\,\delta u + \psi_v'\,\delta v = 0$$

görbét adunk és ebből

$$\delta u = \mu\,\psi_v', \quad \delta v = -\mu\,\psi_u',$$

akkor ezen görbének íveleme

$$\delta\bar{r} = \mu\,(\bar{r}_u'\,\psi_v' - \bar{r}_v'\,\psi_u').$$

Ezen két ívelem scalaris szorzata, ha a közöttük lévő szög α

$$d\bar{r}\,\delta\bar{r} = ds\,\delta s\cos\alpha = \lambda\mu\left\{E\varphi_v'\psi_v' - F(\varphi_u'\psi_v' + \varphi_v'\psi_u') + G\varphi_u\psi_u'\right\}; \quad (14)$$

vectorszorzatuk pedig

$$[d\bar{r}\,\delta\bar{r}] = \lambda\mu\,[\bar{r}_u'\,\bar{r}_v'](\varphi_u'\psi_v' - \varphi_v'\psi_u') = \lambda\mu D(\varphi_u'\psi_v' - \varphi_v'\psi_u')\,\bar{n} \quad \ldots (15)$$

36. A felület leképzése a Gauss-féle gömbre.

Írjunk a tér tetszésszerint választott pontja pl. a coordinátarendszer origója körül egységnyi sugarú gömböt. Ezen Gauss-féle gömböt a következőkép hozhatjuk vonatkozásba felületünkkel: A felület P pontjának $\bar{n}$ normalisával huzzunk párhuzamosat a gömb középpontjából, ezen vector P_0 pontban metszi a gömböt. Ily módon a felület minden pontjához rendelünk a gömbön egy pontot. Ezen eljárásunkról mondjuk, hogy a felületet az egységnyi gömbre leképezzük.* Képletileg e leképzést úgy létesítjük, hogy a felület $\bar{r}$ vectorához rendeljük az origoból kiinduló és hozzátartozó

$$\bar{n} = \frac{[\bar{r}_u'\,\bar{r}_v']}{D}$$

---

* Kommerell V. u. K.: Allgemeine Theorie... II. B. 1903. p. 21.
Scheffers G.: Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. II. B. 1902. p. 204.

egységnyi vectort, melynek végpontja épen a kivánt P_0 pontot adja.

Vegyünk fel most a felület P pontjából kiinduló

$$d\bar{r} = \bar{r}'_u\, du + \bar{r}'_v\, dv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

és

$$\delta\bar{r} = \bar{r}'_u\, \delta u + \bar{r}'_v\, \delta v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

vonalelemet. Ezeknek gömbi képe lesz

$$d\bar{n} = \bar{n}'_u\, du + \bar{n}'_v\, dv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

és

$$\delta\bar{n} = \bar{n}'_u\, \delta u + \bar{n}'_v\, \delta v. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

A felület azon két vonalelemét, melyek egyike merőleges a másiknak gömbi képére, *egymáshoz conjugált irányoknak* nevezzük. Annak feltétele tehát, hogy az (1) és (2) egymáshoz conjugáltak,

$$d\bar{r}\, \delta\bar{n} = L\, du\, \delta u + M(du\, \delta v + \delta u\, dv) + N\, dv\, \delta v = 0 \quad \ldots\ldots (5)$$

lesz, ugyanezen feltételt kapjuk $d\bar{n}\, \delta\bar{r} = 0$-ból is.

Annak feltétele, hogy a $d\bar{r}$ önmagának conjugáltja

$$d\bar{r}\, d\bar{n} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

egyenlőség, a mi azt mutatja, hogy az asymptotikus vonalnak van ezen tulajdonsága. A 34. pont (8) képlete alapján pedig mondhatjuk, hogy a főgörbületi irány merőleges a gömbi képére.

Hasonlítsuk most össze a felület területelemét a hozzátartozó gömbi képének felületével. A felületen az (1) és (2) vonalelemek által határolt terület

$$d\bar{o} = [d\bar{r}\, \delta\bar{r}] = [\bar{r}'_u\, \bar{r}'_v]\, (du\, \delta v - dv\, \delta u),$$

ennek gömbi képe

$$d\bar{o}_0 = [d\bar{n}\, \delta\bar{n}] = [\bar{n}'_u\, \bar{n}'_v]\, (du\, \delta v - dv\, \delta u).$$

A do_0 területnek a do-hoz való viszonyát Gauss a felület P pontjához tartozó *görbületi mértéknek* nevezi, értéke tehát

$$K = \frac{[\bar{n}'_u\, \bar{n}'_v]}{[\bar{r}'_u\, \bar{r}'_v]} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Ha ezen kifejezés számlálóját és nevezőjét szorozzuk $\bar{n}$-el, kapjuk a 34-ik pont (7_1) kifejezését. E szerint tehát a görbületi mérték a felület egy pontjában egyenlő a főgörbületek szorzatával

$$K = \frac{1}{R_1 R_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Keressük most az $\bar{n}$ rádius-vectorral megadott gömbi felület alapmennyiségeit, a melyeket megkülönböztetésül a felület alapmennyiségeitől E_0, F_0, ... betükkel jelzünk. Mindenekelőtt az

$$\Big[[\bar{n}\, \bar{n}'_u]\, [\bar{r}'_u\, \bar{r}'_v]\Big] = -D\Big[\bar{n}\, [\bar{n}\, \bar{n}'_u]\Big]$$

egyenlőség mindkét oldalát kifejtve a 6. pont (VI.) és (II.) képletei szerint, kapjuk

$$D\, \bar{n}'_u = (\bar{n}\, [\bar{r}'_u\, \bar{n}'_u])\, \bar{r}'_v - (\bar{n}\, [\bar{r}'_v\, \bar{n}'_u])\, \bar{r}'_u \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

hasonlókép

$$D\,\bar{n}'_v = (\bar{n}\,[\bar{r}'_u\,\bar{n}'_v])\,\bar{r}'_v - (\bar{n}\,[\bar{r}'_v\,\bar{n}'_v])\,\bar{r}'_u \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

vagy ezek helyett a 32. pont (11) felhasználásával írhatjuk

$$D^2\,\bar{n}'_u = (FM - GL)\,\bar{r}'_u + (FL - EM)\,\bar{r}'_v \ \ldots\ldots \quad (9_1)$$

$$D^2\,\bar{n}'_v = (FN - GM)\,\bar{r}'_u + (FM - EN)\,\bar{r}'_v \ \ldots\ldots \quad (10_1)$$

Ezen képletek a *Weingarten-féle formulák* neve alatt ismeretesek.*

Ezen egyenletekből írhatjuk továbbá

$$\triangle\,\bar{r}'_u = (FM - EN)\,\bar{n}'_u + (EM - FL)\,\bar{n}'_v \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

$$\triangle\,\bar{r}'_v = (FN - GM)\,\bar{n}'_u + (GL - FM)\,\bar{n}'_v \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

A Weingarten-féle formulákból könnyű továbbá felírni ezen eredményeket:

$$\left.\begin{aligned} D\,[\bar{r}'_u\,\bar{n}'_u] &= (FL - EM)\,\bar{n}, \\ D\,[\bar{r}'_v\,\bar{n}'_u] &= (GL - FM)\,\bar{n}, \\ D\,[\bar{r}'_u\,\bar{n}'_v] &= (FM - EN)\,\bar{n}, \\ D\,[\bar{r}'_v\,\bar{n}'_v] &= (GM - FN)\,\bar{n}. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

A (9) és (10) egyenlőségeket megfelelően sorozzuk $\bar{n}'_u$ és $\bar{n}'_v$-el, kapjuk az elsőrendű alapmennyiségeket:

$$\left.\begin{aligned} E_\circ &= HL - KE \\ F_\circ &= HM - KF \\ G_\circ &= HN - KG. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Ezekben mindjárt értékesítettük a 34. pont (6) és (7) képletének eredményeit.

A gömbi kép normalisának irányát ugyancsak a (9) és (10)-ből nyerjük, ha őket vectorképen összeszorozzuk

$$D^4\,[\bar{n}'_u\,\bar{n}'_v] = (EG - F^2)\,(LN - M^2)\,D\bar{n}$$

vagy ebből

$$[\bar{n}'_u\,\bar{n}'_v] = \frac{\triangle}{D}\,\bar{n} = DK\,\bar{n} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

A gömbi kép normalisa tehát párhuzamos a felület megfelelő normalisával. A (15)-ból továbbá kapjuk

$$D_\circ = \frac{\triangle}{D} = KD.$$

Mivel a gömbi kép normalisa $\bar{n}$, azért a másodrendű alapmennyiségek a 32. pont (4_2) szerint

---

* Kommerell V. u. K.: Allgemeine Theorie der Raumkurven u. Flächen. 2. Band. 1903. p. 13.

Auerbach F.– Rothe R.: Taschenbuch für Mathematiker u. Physiker III. Jahrg. 1913. p. 167.

$$L_0 = -\bar{n}'_u \bar{n}'_u = -E_0,$$
$$M_0 = -\bar{n}'_u \bar{n}'_v = -F_0,$$
$$N_0 = -\bar{n}'_v \bar{n}'_v = -G_0.$$

A (14) alapján a vonalelem négyzete a gömbön

$$ds_\circ^2 = H(L\,du^2 + 2\,M\,du\,dv + N\,dv^2) - K\,ds^2 = \left(H\frac{1}{R} - K\right) ds^2,$$

hol $\frac{1}{R}$ a 34. pont (1) egyenlete szerint a felület du, dv irányához tartozó normalis metszet görbülete.

37. Asymptotikus vonalak.

A 33. pontban láttuk, hogy a felület asymptotikus vonalát az

$$\bar{n}\,d^2\bar{r} = -d\bar{r}\,d\bar{n} = L\,du^2 + 2\,M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0 \quad \ldots. \quad (1)$$

feltétel jellemzi és ez esetben $\omega = \frac{\pi}{2}$, vagyis az asymptotikus vonal binormalisa a felület normalisával esik egybe,

$$\bar{\beta} = \bar{n}.$$

Ugyanebből még következik, hogy a görbe simuló síkja a felület érintősíkjával azonos, a görbe főnormalisa tehát a felület egyik érintője.

A $d\bar{r}\,d\bar{n} = 0$ egyenlőség az előző pont szerint annak kifejezése, hogy az asymptotikus görbe minden vonaleleme önmagának conjugáltja.

A 33. pont (10) vagy a (11) képletéből látjuk, hogy az asymptotikus vonal esetében

$$\frac{1}{R} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

vagyis az asymptotikus görbe vonalelemeinek irányában a normalis metszet görbülete eltűnik.

Ha az asymptotikus vonal egyik P pontjában az érintő α szöget zár be a P ponthoz tartozó egyik főgörbületi iránynyal, akkor a (2) alapján Euler tételéből [34. pont (15)] kapjuk

$$tg\,\alpha = \pm\sqrt{-\frac{R_2}{R_1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Ezen képletből látjuk, hogy valós α csak akkor lehetséges, ha R_1 és R_2 ellenkező előjelűek. Ez esetben tehát

$$K = \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{\triangle}{D^2} < 0,$$

ez pedig, mivel D^2 állandóan positiv lévén, csak úgy lehetséges, ha

$$\triangle = L\,M - N^2 < 0.$$

Mondhatjuk tehát, hogy az asymptotikus vonalak a felület azon részein húzódnak, melyen hyperbolikus pontok vannak, míg a felület oly tartományain, hol csak elliptikus pontok fordulnak elő, asymptotikus vonal nem lehet.

Ha a felületet az $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ viszony jellemzi, akkor a (3)-ból kapjuk

$$tg\,\alpha = \pm 1,$$

tehát $$\alpha_1 = 45^\circ \text{ vagy } \alpha_2 = 135^\circ;$$

ez esetben tehát az asymptotikus vonalak egymásra merőlegesek és felezik a főirányok által bezárt szögeket.

Ha az asymptotikus vonalat jellemző $d\bar{r}\,d\bar{n} = 0$ feltételhez hozzáadjuk a felületen állandóan fennálló $\bar{n}\,d\bar{r} = 0$ összefüggést, kapjuk ezen egyenletet

$$d\bar{r}\,(\bar{n} + d\bar{n}) = 0.$$

Az asymptotikus görbe vonaleleme tehát merőleges az $\bar{n}$ és $\bar{n} + d\bar{n}$-re, vagyis két szomszédos felületi normalisra.*

38. Centralis felületek.

A 34. pontban láttuk, hogy a felület főgörbületi irányaihoz tartozó görbületi középpontok az *evoluta-felületet* vagy *centralis felületet* burkolják.** Ezen felület két palástjának egyenlete

$$\bar{r}_1 = \bar{r} + R_1\bar{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

és $$\bar{r}_2 = \bar{r} + R_2\bar{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Vizsgáljuk ezen felületek közül az elsőt, mert eredményünk könnyen átvihető a második felületre is. Mindenekelőtt válaszszuk az $\bar{r}$ felületen paramétervonalaknak a görbületi vonalakat, ez esetben a 34. pont (9) alapján írhatjuk

$$\frac{\partial\bar{n}}{\partial u} = -\frac{1}{R_1}\frac{\partial\bar{r}}{\partial u} \text{ és } \frac{\partial\bar{n}}{\partial v} = -\frac{1}{R_2}\frac{\partial\bar{r}}{\partial v} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

ebből egyszerüen kapjuk a következő összefüggéseket

$$L = \frac{E}{R_1}, \quad M = 0, \quad N = \frac{G}{R_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

---

* Grassmann H.: Anwendung der Ausdehnungslehre auf die allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen. Halle, 1886, 1888, 1893. p. 71.

** Bianchi—Lukat: Vorlesungen über Differentialgeometrie. 2 Aufl. 1910. Teubner p. 239.

Kommerell V. u. K.: Allgemeine Theorie ... II. B. 1903. p. 95.

Scheffers G.: Anwendung ... II. B. 1902. p. 453.

mert a paramétervonalak merőlegessége miatt áll $F=0$. Az első felület vonalelemét a következő fejezi ki

$$d\bar{r}_1 = d\bar{r} + R_1\,d\bar{n} + d\,R_1\,\bar{n}. \tag{5}$$

A (3) egyenlőségből kapjuk

$$R_1\,d\bar{n} = -\frac{\partial\bar{r}}{\partial u}\,du - \frac{R_1}{R_2}\frac{\partial\bar{r}}{\partial v}\,dv.$$

Ezen értéket helyettesítve az (5)-be a vonalelemet ezen kifejezésben kapjuk

$$d\bar{r}_1 = \frac{R_2 - R_1}{R_2}\frac{\partial\bar{r}}{\partial v}\,dv + \bar{n}\,d\,R_1 \tag{6}$$

Ezen egyenlet szolgáltatja az $\bar{r}_1$-nek u és v szerint vett differentiálhányadosait:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\bar{r}_1}{\partial u} &= \frac{\partial R_1}{\partial u}\bar{n}, \\ \frac{\partial\bar{r}_1}{\partial v} &= \frac{R_2 - R_1}{R_2}\frac{\partial\bar{r}}{\partial v} + \frac{\partial R_1}{\partial v}\bar{n}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Ezen két kifejezésből a centralis felület elsőrendű alapmennyiségei:

$$E_1 = \left(\frac{\partial R_1}{\partial u}\right)^2,\quad F_1 = \frac{\partial R_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial R_1}{\partial v},\quad G_1 = \frac{(R_2 - R_1)^2}{R_2^2}\,G + \left(\frac{\partial R_1}{\partial v}\right)^2;$$

az ívelem négyzete pedig ezekből összetéve, vagy közvetlenül a (6)-ból alkotva

$$ds_1^2 = (d\,R_1)^2 + \frac{(R_2 - R_1)^2}{R_2^2}\,G\,dv^2.$$

Az első centralis felületen tehát a paramétervonalak a $v=$ const. és $R_1=$ const. görbéknek felelnek meg.

A centralis felület normalisa a (7) egyenletekből

$$\bar{n}_1 = \frac{1}{D_1}\left[\frac{\partial\bar{r}_1}{\partial u}\,\frac{\partial\bar{r}_1}{\partial v}\right] = \frac{1}{D_1}\,\frac{R_2 - R_1}{R_2}\,\frac{\partial R_1}{\partial u}\left[\bar{n}\,\frac{\partial\bar{r}}{\partial v}\right].$$

Helyettesítsük ezen kifejezésbe a

$$D_1 = \sqrt{E_1\,G_1 - F_1^2} = \frac{R_2 - R_1}{R_2}\,\frac{\partial R_1}{\partial u}\sqrt{G} \tag{8}$$

és a 32. pont (9_1)-ből nyerhető

$$\left[\bar{n}\,\frac{\partial\bar{r}}{\partial v}\right] = -\frac{G}{\sqrt{EG}}\,\frac{\partial\bar{r}}{\partial u}$$

értéket, kapjuk

$$\bar{n}_1 = -\frac{1}{\sqrt{E}}\,\frac{\partial\bar{r}}{\partial u} \tag{9}$$

A centralis felület normalisa tehát párhuzamos az alapfelület egyik főgörbületi irányával.

A másodrendű alapmennyiségek érdekében differentiáljuk a (9) egyenletet

$$\frac{\partial \bar{n}_1}{\partial u} = -\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u^2} + \frac{1}{2\sqrt{E^3}} \frac{\partial E}{\partial u} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \bar{n}_1}{\partial v} = -\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u \, \partial v} + \frac{1}{2\sqrt{E^3}} \frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}.$$

Szorozva ezen kifejezéseket a (7)-tel kapjuk

$$L_1 = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial R_1}{\partial u} L, \quad M_1 = 0, \quad N_1 = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{R_2 - R_1}{R_2} \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u \, \partial v}.$$

Az első kifejezés helyett a (4) felhasználásával írhatjuk még

$$L_1 = \frac{\sqrt{E}}{R_1} \frac{\partial R_1}{\partial u} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Az N_1 értékét pedig a következőkép alakíthatjuk át. A 32. pont (15) és ezen pont (4) képlete alapján

$$n' = \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u \, \partial v} = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} = \frac{1}{2} \frac{\partial N}{\partial u} R_2 + \frac{1}{2} N \frac{\partial R_2}{\partial u} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

A 32. pont (35) képlete alapján pedig

$$\frac{\partial N}{\partial u} = \frac{1}{2} \left(\frac{N}{G} + \frac{L}{E} \right) \frac{\partial G}{\partial u},$$

vagy a (4) segítségével

$$\frac{\partial N}{\partial u} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{\partial G}{\partial u}.$$

Ezen értéket a (11)-be téve, kapjuk

$$\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} = -\frac{R_1}{R_2 - R_1} \frac{G}{R_2} \frac{\partial R_2}{\partial u}$$

és így végül

$$N_1 = -\frac{G}{\sqrt{E}} \frac{R_1}{R_2{}^2} \frac{\partial R_2}{\partial u} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

A centralis felület görbületi mértéke a (8), (10) és (12) alapján

$$K_1 = -\frac{1}{(R_2 - R_1)^2} \frac{\dfrac{\partial R_2}{\partial u}}{\dfrac{\partial R_1}{\partial u}}.$$

39. A felületek lefejtése és Gauss tétele.

Vizsgáljunk most két felületet, melyek mindegyikének rádiusvectorát ugyanazon (u, v) paraméterek határozzák meg. Ezen két felület egyenlete legyen

$$\bar{r} = \overline{F}(u, v) \text{ és } \bar{r}_1 = \overline{F}_1(u, v).$$

Az első felület egy $P(u, v)$ pontjához tartozik a második felület $P_1(u, v)$ pontja, mely ugyanazon paraméter értékeknek felel meg. Továbbá a P pontból kiinduló

$$d\bar{r} = \bar{r}'_u \, du + \bar{r}'_v \, dv$$

vonalelemhez tartozik a másik felület P_1 pontjához tartozó

$$d\bar{r}_1 = \bar{r}'_{1u} \, du + \bar{r}'_{1v} \, dv$$

vonalelem. Ezen két vonalelem hossza

$$ds = \sqrt{E \, du^2 + 2 \, F \, du \, dv + G \, dv^2},$$
$$ds_1 = \sqrt{E_1 \, du^2 + 2 \, F_1 \, du \, dv + G_1 \, dv^2}.$$

A két felület összetartozó vonalelemei általában nem egyenlők. Válaszszuk azonban a második felület $\bar{r}_1$ vectorát úgy, hogy az összetartozó pontokban mindig álljon

$$E = E_1, \; F = F_1 \text{ és } G = G_1; \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (1)$$

ez esetben a két felület megfelelő pontjaiban mindig áll a

$$ds = ds_1$$

egyenlőség.

Azonfelül ezen esetben az egyik felület két vonalelemének hajlásszöge is ugyanaz, mint a másik felület megfelelő szöge. Az (1) egyenlőség ugyanis magával hozza a

$$d\bar{r} \, \delta\bar{r} = E \, du \, \delta u + F \, (du \, \delta v + dv \, \delta u) + G \, dv \, \delta v =$$
$$= E_1 \, du \, \delta u + F_1 \, (du \, \delta v + dv \, \delta u) + G_1 \, dv \, \delta v = d\bar{r}_1 \, \delta\bar{r}_1$$

egyenlőséget, mert $ds \, \delta s = ds_1 \, \delta s_1$. Ép ezen tételből következik, hogy a két felület megfelelő elemi területeinek absolut értéke is egyenlő, vagyis

$$| \, [d\bar{r} \, \delta\bar{r}] \, | = | \, [d\bar{r}_1 \, \delta\bar{r}_1] \, |.$$

Az (1) feltételnek eleget tevő két felületet *egymásra lefejthetőnek* mondjuk. Az egyik felület területelemét ugyanis fedésbe hozhatjuk a másik felület megfelelő területelemével és ebből kiindulva az egyik felület folytonos hajlításával a szomszédos területeket is egybeejtjük, az egyik felületet tehát lefejthetjük a másikra.

Mint láttuk, két felületnél az egymásra lefejthetőség feltétele az elsőrendű alapmennyiségek azonossága volt. Ez esetben azonban a két felület mindazon mennyiségei is azonosak, melyek az elsőrendű alapmennyiségekkel és azok differentiálhányadosaival kifejezhetők. Vagy másképen: lefejtés esetében változatlanok a felület mindazon mennyiségei, melyek az elsőrendű alapmennyiségekkel és azok differentiálhányadosaival adhatók meg.

Gauss bizonyított be egy idetartozó szép tételt: A felületek lefejtésénél a görbületi mérték változatlan. Ezen tétel igazolása úgy eszközölhető, hogy kimutatjuk, hogy a görbület

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{\triangle}{D^2}$$

kifejezhető a p, p', p'', q, q', q'' mennyiségekkel, melyek a 32. pont (16) és (17) csoportja szerint valóban megadhatók az elsőrendű alapmennyiségek differentiálhányadosaival.

A 32. pont (5_1) és (6_1) képleteiből írhatjuk

$$D^2 p p'' = \begin{vmatrix} \xi & \eta & \xi \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x''_{uu} & y''_{uu} & z''_{uu} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi & \eta & \xi \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x''_{vv} & y''_{vv} & z''_{vv} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & L \\ 0 & E & m \\ N & m'' & \bar{r}''_{uu} \bar{r}''_{vv} \end{vmatrix} =$$

$$= - ELN - mm'' + E(\bar{r}''_{uu} \bar{r}''_{vv}).$$

Hasonlóképen írhatjuk

$$\begin{aligned} D^2 p'^2 &= - EM^2 - m'^2 + E(\bar{r}''^2_{uv}), \\ D^2 qp'' &= - FLN - mn'' + F(\bar{r}''_{uu} \bar{r}''_{vv}), \\ D^2 p' q' &= - FM^2 - m' n' + F(\bar{r}''^2_{uv}), \\ D^2 qq'' &= - GLN - nn'' + G(\bar{r}''_{uu} \bar{r}''_{vv}), \\ D^2 q'^2 &= - GM^2 - n'^2 + G(\bar{r}''^2_{uv}). \end{aligned}$$

Ezen képletek alapján egyszerű kivonással kapjuk

$$\left.\begin{aligned} D^2(pp'' - p'^2) &= E\Gamma - E\triangle + m'^2 - mm'', \\ D^2(p'' q - p' q') &= F\Gamma - F\triangle + m' n' - mn'', \\ D^2(qq'' - q'^2) &= G\Gamma - G\triangle + n'^2 - nn''. \end{aligned}\right\} \quad \ldots (2)$$

Ezen egyenletekből a 32. pont (30) segítségével kiküszöböljük a Γ-át, kapjuk

$$\left.\begin{aligned} D^2(p'^2 - pp'' + 2pq' - 2p'q) + 3(m'n - mn') &= D^2\left(\frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p'}{\partial u}\right) - E\triangle \\ D^2(p' q' - p'' q) + m'' n - mn'' &= D^2\left(\frac{\partial p'}{\partial v} - \frac{\partial p''}{\partial u}\right) - F\triangle \\ D^2(p' q' - p'' q) + m'' n - mn'' &= D^2\left(\frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q'}{\partial u}\right) - F\triangle \\ D^2(q'^2 - qq'' + 2p'q'' - 2p''q') + 3(m''n' - m'n'') &= D^2\left(\frac{\partial q'}{\partial v} - \frac{\partial q''}{\partial u}\right) - G\triangle. \end{aligned}\right\} (3)$$

Végül helyettesítsük a 32. pont (19) képleteinek eredményeit és közvetlenül kapjuk a görbületi mértéknek, $K = \frac{\triangle}{D^2}$-nak kivánt kifejezéseit:

$$\left.\begin{aligned} K &= \frac{1}{E}\left(\frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p'}{\partial u} + pp'' - p'^2 + pq' - p'q\right), \\ K &= \frac{1}{F}\left(\frac{\partial p'}{\partial v} - \frac{\partial p''}{\partial u} + pq'' - p'q'\right), \\ K &= \frac{1}{F}\left(\frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q'}{\partial u} + pq'' - p'q'\right), \\ K &= \frac{1}{G}\left(\frac{\partial q'}{\partial v} - \frac{\partial q''}{\partial u} + qq'' - q'^2 + p'q'' - p''q'\right). \end{aligned}\right\} \quad \ldots (4)$$

Ezen négy egyenlőség adja a Gauss-féle összefüggéseket.*

Mivel a sík bármely normalis metszetének görbülete eltűnik, azért a sík minden pontjában a görbületi mérték nulla. Ebből következik, hogy mindazon felületek is, melyeknek görbületi mértéke mindenütt nulla, a síkra lefejthetők. Ilyen felület a kúp, a henger.

40. A felületsereg burkoltja.

Ha a vectorfüggvénynyel adott felület egyenletében az u, v paraméteren kívül más w változó is szerepel, akkor az

$$\bar{r} = \overline{F}(u, v, w)$$

vector nem egy felületet, hanem a felületek egész seregét, vagyis vector-teret jelent. A w minden határozott értékéhez tartozik egy-egy felület. A szomszédos felületek egymást vonalakban metszik, a mely vonalak mértani helyét a *felületsereg burkoltjának* nevezzük.

Legyen az $\bar{r} = \overline{F}(u, v, w)$ egy pontjához a szomszédos felületen egy közeli pont

$$\bar{r}_1 = \overline{F}(u + du, v + dv, w + dw) = \overline{F}(u, v, w) + \overline{F}'_u\, du + F'_v\, dv + F'_w\, dw.$$

A két felület metszési vonalán

$$\bar{r} = \bar{r}_1,$$

tehát

$$\overline{F}'_u\, du + \overline{F}'_v\, dv + \overline{F}'_w\, dw = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

vagy ha a felületsereg egyenlete

$$\bar{r} = \overline{F}(u, v, w) = \varphi(u, v, w)\,\bar{\varepsilon}_1 + \psi(u, v, w)\,\bar{\varepsilon}_2 + \chi(u, v, w)\,\bar{\varepsilon}_3$$

alakban van adva, az (1) helyett írhatjuk

$$\begin{aligned} \varphi'_u\, du + \varphi'_v\, dv + \varphi'_w\, dw &= 0, \\ \psi'_u\, du + \psi'_v\, dv + \psi'_w\, dw &= 0, \\ \chi'_u\, du + \varphi'_v\, dv + \chi'_w\, dw &= 0. \end{aligned}$$

---

* Kissé más alakban l. Kommerell V. u. K.: Allgemeine Theorie.... II. Band. 1903. p. 90.

Ezen egyenletrendszerből azonban csak akkor kapunk a du, dv, dw mennyiségekre nullától különböző megoldást, ha

$$\begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v & \varphi'_w \\ \psi'_u & \psi'_v & \psi'_w \\ \chi'_u & \chi'_v & \chi'_w \end{vmatrix} = 0,$$

vagy Donkin jelölésével $\frac{\partial(\varphi, \psi, \chi)}{\partial(u, v, w)} = 0.$

Ha ezen feltételi egyenletből valamelyik paramétert kiszámítjuk és a felületsereg egyenletébe helyettesítjük, megkapjuk a burkolt felület egyenletét.*

41. A felületek leképzése reciproc radiusokkal.**

Az $\bar{r} = \overline{F}(u, v)$ radius-vectorral megadott felület minden P pontjához rendeljük az $\bar{r}_1 = \overline{F}_1(u, v)$ felület azon P_1 pontját, mely ugyanazon radius-vectoron fekszik, mint P, de absolut értékükre áll az $r r_1 = 1$ egyenlőség. Ezen eljárásról mondjuk, hogy az $\bar{r}$ felületet az egységnyi sugarú gömbre vonatkozólag reciproc radiusokkal leképezzük. Az $\bar{r}$ és $\bar{r}_1$ felület leképzése az $r r_1 = 1$ összefüggés alapján kölcsönös, tehát az $\bar{r}_1$ reciproc radiusokkal való leképzésénél az $\bar{r}$ felületre jutunk. Mennyiségtani alakja e leképzésnek

$$\bar{r}_1 = \frac{\bar{r}}{r^2} = r_1{}^2 \bar{r} \text{ vagy } \bar{r} = \frac{\bar{r}_1}{r_1{}^2} = r^2 \bar{r}_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

lesz. Vizsgáljuk most az $\bar{r}_1$ felület alapmennyiségeit továbbá vectorait és iparkodjunk ezeket kifejezni az $\bar{r}$ felület mennyiségeivel. Mindenekelőtt az (1)-ből kapjuk a vonalelem vectorára

$$d\bar{r}_1 = \frac{r\, d\bar{r} - 2\, dr\, \bar{r}}{r^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

négyzetre emelve, mivel $\bar{r}\, d\bar{r} = r\, dr$, kapjuk

$$ds_1{}^2 = \frac{ds^2}{r^4}, \quad ds_1 = \frac{ds}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

---

* Raffy L.: Leçons sur les applications géométriques de l'analyse. Paris. Gauthier. 1897. p. 58.

** Rothe R.: Über die Inversion einer Fläche und die konforme Abbildung zweier Flächen aufeinander mit Erhaltung der Krümmungslinien. Mathem. Annalen. 72. B. 1912. p. 57.

Az (1)-ből kapjuk továbbá

$$\left.\begin{aligned}\bar{r}'_{1u} &= \frac{\bar{r}'_u}{r^2} - 2\,\frac{\bar{r}\,r'_u}{r^3}\\ \bar{r}'_{1v} &= \frac{\bar{r}'_v}{r^2} - 2\,\frac{\bar{r}\,r'_v}{r^3}.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Ezekből nyerjük az elsőrendű alapmennyiségeket, mivel $\bar{r}\,\bar{r}'_u = rr'_u$ és $\bar{r}\,\bar{r}'_v = rr'_v$:

$$E_1 = \frac{E}{r^4},\quad F_1 = \frac{F}{r^4},\quad G_1 = \frac{G}{r^4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

és így $$D_1{}^2 = \frac{D^2}{r^8},\quad D_1 = \frac{D}{r^4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Az érintő irányának egységnyi vectora a (2) és (3) alapján

$$\bar{\tau}_1 = \frac{d\bar{r}_1}{ds_1} = \bar{\tau} - \frac{2}{r}\,\frac{dr}{ds}\,\bar{r} \quad \ldots\ldots\, ,\ \ldots\ldots \quad (7)$$

Szorozzuk meg ezen egyenlőséget a radius-vector irányát jelző egységnyi vectorral $\frac{\bar{r}_1}{r_1} = \frac{\bar{r}}{r}$-el, kapjuk

$$\frac{\bar{r}_1\,\bar{\tau}_1}{r_1} = \frac{\bar{r}\,\bar{\tau}}{r} - 2\,\frac{dr}{ds},$$

helyettesítve ebbe $\bar{r}_1\,\bar{\tau}_1 = r_1\,\frac{dr_1}{ds_1}$ és $\bar{r}\,\bar{\tau} = r\,\frac{dr}{ds}$ értékeket, kapjuk

$$\frac{dr_1}{ds_1} = -\frac{dr}{ds}.$$

Ebből látjuk, hogy a $\bar{\tau}$ és $\bar{\tau}_1$ a (7) értelmében nem egyirányúak ugyan, de a radius-vectorral oly szöget zárnak be, melyek egymást 180°-ra egészítik ki. Ha a (7) mindkét oldalát vectorképen szorozzuk az $\frac{\bar{r}_1}{r_1} = \frac{\bar{r}}{r}$ egységvectorral, kapjuk

$$\left[\frac{\bar{r}_1}{r_1}\,\bar{\tau}_1\right] = \left[\frac{\bar{r}}{r}\,\bar{\tau}\right]$$

és ebből látható, hogy a megfelelő érintők egy síkban feküsznek.

A reciproc felület normalisára kapjuk a (4) képleteiből

$$\bar{n}_1 = \frac{[\bar{r}'_{1u}\,\bar{r}'_{1v}]}{D_1} = \bar{n} + \frac{2}{r\,D}[\bar{r},\ r'_v\,\bar{r}'_u - r'_u\,\bar{r}'_v],$$

vagy mivel

$$[\bar{r}\,\bar{n}] = \frac{1}{D}\left[\bar{r},\ \ [\bar{r}'_u\,\bar{r}'_v]\right] = \frac{r}{D}(r'_v\,\bar{r}'_u - r'_u\,\bar{r}'_v),$$

az $\bar{n}_1$ értékére kapjuk

$$\bar{n}_1 = \bar{n} + \frac{2}{r^2}\left[\bar{r},\ [\bar{r}\,\bar{n}]\right].$$

Ebből kifejtés után a következőre jutunk:

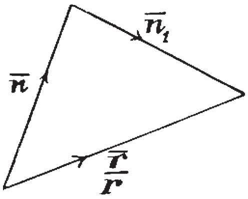
$$\bar{n}_1 = \bar{n} + \frac{2}{r^2}(\bar{r}\,\bar{n})\,\bar{r} - 2\,\bar{n} = \frac{2\,T}{r^2}\bar{r} - \bar{n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

hol $T = \bar{n}\,\bar{r}$ az érintő-síknak az origótól való távolsága. A reciproc felületnél

$$T_1 = \bar{n}_1\,\bar{r}_1 = \frac{T}{r^2}$$

és ebből

$$\frac{T_1}{r_1} = \frac{T}{r}.$$



27. ábra.

A (8) helyett tehát írhatjuk

$$\bar{n} + \bar{n}_1 = 2\frac{T}{r}\frac{\bar{r}}{r} = 2\frac{T_1}{r_1}\frac{\bar{r}_1}{r_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Ezen képlet szerint a két felület megfelelő pontjaiban a normalisok egységnyi vectora oly egyenlőszárú háromszöget alkot, melynek alapja $2\frac{T}{r} = 2\frac{T_1}{r_1}$, iránya pedig a radius-vectoréval egybeesik.

A másodrendű alapmennyiségek kiszámítása céljából kapjuk a (2)-ből

$$d^2\,\bar{r}_1 = \frac{1}{r^2}d^2\,\bar{r} - 4\frac{dr}{r^3}d\bar{r} - 2\frac{d^2\,r}{r^3}\bar{r} + 6\frac{dr^2}{r^4}\bar{r}.$$

Szorozzuk meg ezen kifejezést scalarisan $\bar{n}_1 = \frac{2\,T}{r^2}\bar{r} - \bar{n}$ egység-vectorral, figyelembe véve az $\bar{n}\,\bar{r} = T$, $\bar{n}\,d\bar{r} = 0$, $\bar{r}\,d\bar{r} = r\,dr$ és ez utóbbiból eredő

$$\bar{r}\,d^2\,\bar{r} = dr^2 + r\,d^2\,r - ds^2$$

egyenleteket, kapjuk

$$\bar{n}_1\,d^2\,\bar{r}_1 = -\frac{1}{r^2}\bar{n}\,d^2\,\bar{r} - \frac{2\,T}{r^4}ds^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

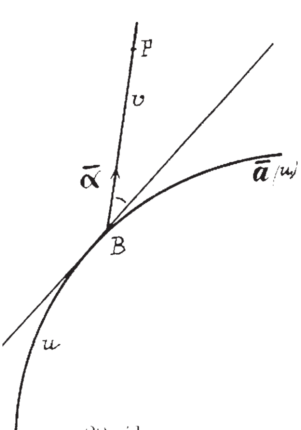
Ezen egyenletet a du^2, $du\,dv$, dv^2 szerint tagokra bontva, kapjuk

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= -\frac{1}{r^2}\left(L + \frac{2\,T}{r^2}E\right), \\ M_1 &= -\frac{1}{r^2}\left(M + \frac{2\,T}{r^2}F\right), \\ N_1 &= -\frac{1}{r^2}\left(N + \frac{2\,T}{r^2}G\right). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Ha a (10)-et elosztjuk a $ds_1{}^2 = \frac{ds^2}{r^4}$ kifejezéssel, kapjuk a görbületi mértéket:

$$K_1 = -r^2\,K - 2\,T \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

42. Vonalfelületek.



28. ábra.

Azon felületeket, melyek egyszeresen végtelen sok egyenes vonal folytonos mozgásával létesülnek, vagyis egyeneseknek burkoltjai, *vonalfelületeknek* vagy *szabályos felületeknek* nevezzük.* A térgörbék elméletében találkoztunk már ilyen felületekkel. A térgörbe érintőinek, főnormalisainak és binormálisainak burkoltja ilyen felületet adott. Vizsgáljuk most az általános vonalfelületet.

A vonalfelület alkotóit, vagyis a burkoló egyeneseket messük a felületen húzott $\bar{a}(u)$ vonallal, a hol u ezen vonal ívhossza a görbe bizonyos A pontjától számítva. Ezen görbe B pontjához tartozó alkotónak irányát jelezze az $\bar{\alpha}$ egységnyi vector, mely szintén függvénye az u-nak. Ha ezen alkotónak P pontja v távolságban van a B-től, akkor a P radiusvectora írható

$$\bar{r} = \bar{a}(u) + v\,\bar{\alpha}(u) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Ha ezen kifejezésben a v változik, kapjuk a vonalfelület egy alkotójának minden pontját, ha pedig $v = 0$ és az u változik, kapjuk az $\bar{a}(u)$ görbét, a mit a felület *irányvonalának* nevezünk. Az u és v változásával az (1) a vonalfelület egyenletét adja.

Ha az $\bar{a}$ és $\bar{\alpha}$ vectoroknak u szerint vett differentiálhányadosait $\bar{a}'$ és $\bar{\alpha}'$ betükkel jelöljük, az (1)-ből nyerjük

$$\begin{aligned} \bar{r}'_u &= \bar{a}' + v\,\bar{\alpha}' \\ \bar{r}'_v &= \qquad\;\; \bar{\alpha} \end{aligned} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Ezen egyenlőségekből a felület elsőrendű alapmennyiségei, ha figyelembe vesszük, hogy $\bar{a}' = \bar{\tau}$ az $\bar{a}(u)$ görbe érintőjének egységnyi vectora, $\bar{\alpha}\,\bar{\alpha}' = 0$, és $\bar{a}'\,\bar{\alpha} = \cos\vartheta$, hol a ϑ az irányvonal érintője és az alkotó között lévő hajlásszög:

$$\begin{aligned} E &= 1 + 2\,\bar{a}'\,\bar{\alpha}'\,v + \bar{\alpha}'^2\,v^2, \\ F &= \cos\vartheta, \\ G &= 1. \end{aligned}$$

---

* Kommerell V. u. K.: Spezielle Flächen und Theorie der Strahlensysteme. Leipzig. Sammlung Schubert. 1911. p. 68.

Bianchi-Lukat: Vorlesungen über Differentialgeometrie 2. Aufl. 1910. p. 223.

Scheffers G.: Anwendung... II. B. 1902. p. 216.

A vonalelem négyzete tehát

$$ds^2 = (1 + 2\,\bar{a}'\,\bar{\alpha}'\,v + \alpha'^2\,v^2)\,du^2 + 2\cos\vartheta\,du\,dv + dv^2 \;\ldots\ldots\; (3)$$

Az alapmennyiségekből kapjuk még

$$D^2 = \sin^2\vartheta + 2\,\bar{a}'\,\bar{\alpha}'\,v + \bar{\alpha}'^2\,v^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (4)$$

A felület normalisának iránya pedig

$$\bar{n} = \frac{1}{D}[\bar{r}'_u\,\bar{r}'_v] = \frac{1}{D}[\bar{a}'\,\bar{\alpha}] + \frac{v}{D}[\bar{\alpha}'\,\bar{\alpha}] \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (5)$$

képletből kapható.

A másodrendű alapmennyiségek kedvéért differentiáljuk a (2) alatt lévő vectorokat

$$\left.\begin{aligned} \bar{r}''_{uu} &= \bar{a}'' + v\,\bar{\alpha}'', \\ \bar{r}''_{uv} &= \bar{\alpha}', \\ \bar{r}''_{vv} &= 0. \end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (6)$$

A másodrendű alapmennyiségek tehát a következők:

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{1}{D}\,\bar{a}''\,[\bar{a}'\,\bar{\alpha}] + \frac{v}{D}\,\bar{a}''\,[\bar{\alpha}'\,\bar{\alpha}] + \frac{v}{D}\,\bar{\alpha}''\,[\bar{a}'\,\bar{\alpha}] + \frac{v^2}{D}\,\bar{\alpha}''\,[\bar{\alpha}'\,\bar{\alpha}], \\ M &= \frac{1}{D}\,\bar{\alpha}'\,[\bar{a}'\,\bar{\alpha}], \\ N &= 0. \end{aligned}\right\} \;.\; (7)$$

Az ívelem második differentiáléja a (6) szerint

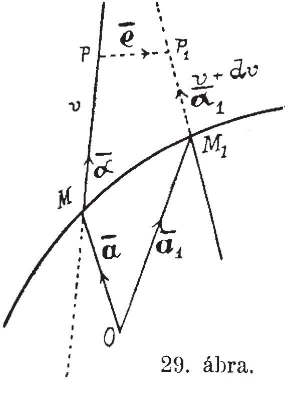
$$d^2\,\bar{r} = (\bar{a}''\,du + \bar{\alpha}''\,v\,du + 2\,\bar{\alpha}'\,dv)\,du.$$

Az asymptotikus vonalak differentiálegyenlete tehát

$$\{(\bar{n}\,\bar{a}'')\,du + (\bar{n}\,\bar{\alpha}'')\,v\,du + 2\,(\bar{n}\,\bar{\alpha}')\,dv\}\,du = 0.$$

Ebből látjuk, hogy az asymptotikus vonalak egyik rendszere $u = \text{const}$, vagyis az alkotók, a másik rendszere pedig egy Riccati-féle differentiálegyenlet megoldásával nyerhető.

Az alkotók derékszögű trajectoriáinak differtiálegyenlete a 33. pont (18) képlete alapján $\cos\vartheta\,du + dv = 0$,



29. ábra.

ebből kapjuk

$$v = -\int\cos\vartheta\,du.$$

Keressük most két szomszédos alkotó legrövidebb távolságát. Jelezzük ezen távolságot kifejező vectort $\bar{e}$-vel. Mivel $\bar{e}$ a legrövidebb út két szomszédos alkotó között, azért $\bar{e}$ merőleges mindkét alkotóra, vagy az irányukat jelző $\bar{\alpha}$ és $\bar{\alpha}_1$ vectorokra. Legyen a két szomszédos pont, hol $\bar{e}$ az alkotókat metszi P és P_1, hol

$$P = 0 + \bar{a} + v\,\bar{\alpha}$$

és

$$P_1 = 0 + \bar{a}_1 + (v + dv)\,\bar{\alpha}_1,$$

ezen kifejezésekben

$$\bar{a}_1 = \bar{a} + \bar{a}'\, du,$$

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{\bar{\alpha} + \bar{\alpha}'\, du,}{\lambda}$$

hol

$$\lambda^2 = 1 + \bar{\alpha}'^2\, du^2.$$

Ezek után írhatjuk

$$\bar{a} + v\,\bar{\alpha} + \bar{e} = \bar{a} + \bar{a}'\, du + (v + dv)\,\bar{\alpha}_1.$$

Szorozzuk meg ezen egyenlőséget scalarisan az $[\bar{\alpha}\,\bar{\alpha}_1] = [\bar{\alpha}\,\bar{\alpha}']\frac{du}{\lambda}$ vectorral, kapjuk

$$\bar{e}\,[\bar{\alpha}\,\bar{\alpha}'] = \bar{a}'\,[\bar{\alpha}\,\bar{\alpha}']\, du.$$

Emeljük négyzetre ezen kifejezés mindkét oldalát, a mit a 6. pont (I.) képlete szerint könnyen megalkothatunk, mivel $\bar{\alpha}\,\bar{\alpha}' = 0$, $\bar{a}'^2 = 1$

$$\bar{e}^2\,\bar{\alpha}'^2 - (\bar{e}\,\bar{\alpha}')^2 = \left\{\bar{\alpha}'^2 - \bar{\alpha}'^2\,(\bar{\alpha}\,\bar{a}')^2 - (\bar{a}'\,\bar{\alpha}')^2\right\} du^2,$$

vagy

$$[\bar{e}\,\bar{\alpha}']^2 = \left\{\bar{\alpha}'^2 \sin^2\vartheta - (\bar{\alpha}'\,\bar{a}')^2\right\} du^2.$$

Ha ezen kifejezésben

$$\bar{\alpha}'^2 \sin^2\vartheta - (\bar{\alpha}'\,\bar{a}')^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

egyenlőség áll fenn, akkor vagy $\bar{e} = 0$, tehát a szomszédos alkotók metszik egymást, vagy $\bar{e}$ és $\bar{\alpha}'$ egyirányúak, vagyis a szomszédos alkotók egymással párhuzamosak. Ezen esetben a vonalfelület síkba lefejthető, mert görbületi mértéke eltűnik. Valóban a (7)-ből kapjuk ugyancsak a 6. pont (I.) képlete alapján

$$\triangle = LN - M^2 = -\frac{1}{D^2}\left\{\bar{\alpha}'^2 \sin^2\vartheta - (\bar{\alpha}'\,\bar{a}')^2\right\}.$$

A görbületi mérték

$$K = \frac{\triangle}{D^2} = -\frac{1}{D^4}\left\{\bar{\alpha}'^2 \sin^2\vartheta - (\bar{\alpha}'\,\bar{a}')^2\right\}.$$

a (8) feltétel mellett valóban eltűnik, tehát a vonalfelület ez esetben síkra lefejthető.

43. A nabla-művelet görbevonalú coordinátákban.

Ha az $\bar{r}$ radius-vector három változónak függvénye,

$$\bar{r} = \bar{F}(u, v, w) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

akkor az $\bar{r}$ vectorteret határoz meg. Ha a paraméterek egyikének, pl. a w-nek állandó értéket adunk, az (1) kifejezés felület egyenletét szolgáltatja, a mit w-paraméter-felületnek mondunk. Hasonlókép van u-paraméter-felület és v-paraméter-felület. Ha két paraméter állandó értéket vesz fel, akkor vonal egyenletét kapjuk. Pl. $v =$ const. és $w =$ const. oly görbét ad, melyben a v-paraméter-felület és a w felülete metszi egymást. Ha mindhárom paraméter állandó, akkor a tér egy pontját kapjuk az (1)-ből.

Legyen most a vectortér egy pontja O, melyet az $\bar{r} = \overline{F}(u, v, w)$ határoz meg. Ezen vectornak a változása ezen pontban az egyes paraméterek szerint

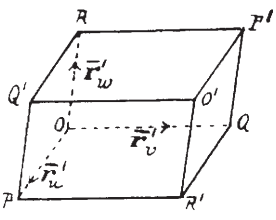
$$\bar{r}'_u\, du,\ \bar{r}'_v\, dv,\ \bar{r}'_w\, dw.$$

Ezen három vector általában ferdeszöget zár be egymással és a térben egy egyenlőközű hatlapot határoz meg, melynek az O pontból kiinduló átlója

$$d\bar{r} = \overline{OO'} = \bar{r}'_u\, du + \bar{r}'_v\, dv + \bar{r}'_w\, dw,$$

köbtartalma pedig

$$ds = \bar{r}'_w\, [\bar{r}'_u\, \bar{r}'_v]\, du\, dv\, dw.$$



30. ábra.

Vizsgáljuk most ezen parallelepipedonhoz tartozó felületi integrált. Az $O\,P\,R'\,Q$ oldallapnál a felületelem vectora kifelé iránylik, tehát ellentétes irányú az $[\bar{r}'_u\, \bar{r}'_v]$ vectorral és így

$$d\bar{f}_3 = -[\bar{r}'_u\, \bar{r}'_v]\, du\, dv.$$

Az átellenes oldallapnál az R-ben

$$\bar{r}_1 = \bar{r} + \bar{r}'_w\, dw + \bar{r}''_{ww} \frac{dw^2}{2},$$

tehát

$$\overline{R\,Q'} = \bar{r}'_u\, du + \bar{r}''_{uw}\, du\, dw + \ldots$$
$$\overline{RP'} = \bar{r}'_v\, dv + \bar{r}''_{vw}\, dv\, dw + \ldots$$

Az $R\,Q'\,O'\,P'$ elemi területe tehát a negyedrendü végtelen kicsiket elhagyva

$$d\bar{f}_3' = [\bar{r}'_u\, \bar{r}'_v]\, du\, dv + [\bar{r}'_u\, \bar{r}''_{vw}]\, du\, dv\, dw - [\bar{r}'_v\, \bar{r}''_{uw}]\, du\, dv\, dw.$$

A két felületi vector összege

$$d\bar{f}_3 + d\bar{f}_3' = \{[\bar{r}'_u\, \bar{r}''_{vw}] - [\bar{r}'_v\, \bar{r}''_{uw}]\}\, du\, dv\, dw \quad \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

Hasonló eljárással kapjuk az $O\,R\,P'\,Q$ és $P\,Q'\,O'\,R'$ oldallapokon

$$d\bar{f}_1 + d\bar{f}_1' = \{[\bar{r}'_v\, \bar{r}''_{uw}] - [\bar{r}'_w\, \bar{r}''_{uv}]\}\, du\, dv\, dw \ldots\ldots\ldots\ (3)$$

és végül az $O\,R\,Q'\,P$ és $Q\,P'\,O'\,R'$ oldallapokon

$$d\bar{f}_2 + d\bar{f}_2' = \{[\bar{r}'_w\, \bar{r}''_{uv}] - [\bar{r}'_u\, \bar{r}''_{vw}]\}\, du\, dv\, dw \quad \ldots\ldots\ldots\ (4)$$

Összegezve ezen felületi vectorokat, azt látjuk, hogy a parallelepipedon felületi vectorainak összege eltűnik, a mint a 9. pont eredményeiből is következik.

Számítsuk ki most az $\bar{r} = \overline{F}(u, v, w)$ vectortér, illetőleg az általa meghatározott parallelepipedon segítségével a gradiens, divergentia és rotatio kifejezéseket.

1. Legyen adva a térnek valamely φ scalaris függvénye, ennek gradiensét az O pontban

$$\lim_{ds=0} \frac{\int\limits_{s} \varphi \, d\bar{f}}{ds} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

szolgáltatja, hol ds jelenti a parallelepipedon köbtartalmát, a számlálóban lévő integrálást pedig ki kell terjeszteni a parallelepipedon felületére.

A számítás végrehajtásánál magasabbrendű végtelen kicsik mellőzésével vehetjük, hogy az $O\,Q\,R'\,P$ oldallapon φ értéke $\varphi_3 = \varphi$, az átellenes oldallapon pedig

$$\varphi_3' = \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial w} dw\cdot$$

Ezen oldallapoknál tehát kapjuk ezen szorzatokat:

$$\varphi_3 \, d\bar{f}_3 = - [\bar{r}_u' \, \bar{r}_v'] \, \varphi \, du \, dv,$$

$$\varphi_3' \, d\bar{f}_3' = [\bar{r}_u' \, \bar{r}_v'] \, \varphi \, du \, dv + \left\{ [\bar{r}_u' \, \bar{r}_{vw}''] \, \varphi - [\bar{r}_v' \, \bar{r}_{uw}''] \, \varphi + [\bar{r}_u' \, \bar{r}_v'] \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right\} du \, dv \, dw.$$

Ezek összege

$$\varphi_3 \, d\bar{f}_3 + \varphi_3' \, d\bar{f}_3' = \left\{ [\bar{r}_u' \, \bar{r}_{vw}''] \, \varphi - [\bar{r}_v' \, \bar{r}_{uw}''] \, \varphi + [\bar{r}_u' \, \bar{r}_v'] \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right\} du \, dv \, dw.$$

Hasonlókép kapjuk az $OQP'R$ és $PR'O'Q'$ oldallapoknál

$$\varphi_1 \, d\bar{f}_1 + \varphi_1' \, d\bar{f}_1' = \left\{ [\bar{r}_v' \, \bar{r}_{uw}''] \, \varphi - [\bar{r}_w' \, \bar{r}_{uv}''] \, \varphi + [\bar{r}_v' \, \bar{r}_w'] \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\} du \, dv \, dw;$$

az $OPQ'R$ és $QR'O'P'$ oldallapoknál pedig

$$\varphi_2 \, d\bar{f}_2 + \varphi_2' \, d\bar{f}_2' = \left\{ [\bar{r}_w' \, \bar{r}_{uv}''] \, \varphi - [\bar{r}_u' \, \bar{r}_{vw}''] \, \varphi + [\bar{r}_w' \, \bar{r}_u'] \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\} du \, dv \, dw.$$

Ezeket összegezve kapjuk

$$\int\limits_{s} \varphi \, d\bar{f} = \left\{ [\bar{r}_v' \bar{r}_w] \frac{\partial \varphi}{\partial u} + [\bar{r}_w' \, \bar{r}_u'] \frac{\partial \varphi}{\partial v} + [\bar{r}_u' \, \bar{r}_v'] \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right\} du \, dv \, dw$$

és ennek segítségével az (5)-ből nyerjük:

$$ds \operatorname{grad} \varphi = \left\{ [\bar{r}_v' \bar{r}_w'] \frac{\partial \varphi}{\partial u} + [\bar{r}_w' \, \bar{r}_u'] \frac{\partial \varphi}{\partial v} + [\bar{r}_u' \, \bar{r}_v'] \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right\} du \, dv \, dw,$$

vagy ds értékét helyettesítve kapjuk

$$\bar{r}_w' \, [\bar{r}_u' \, \bar{r}_v'] \, \nabla \varphi = [\bar{r}_v' \, \bar{r}_w'] \frac{\partial \varphi}{\partial u} + [\bar{r}_w' \, \bar{r}_u'] \frac{\partial \varphi}{\partial v} + [\bar{r}_u' \, \bar{r}_v'] \frac{\partial \varphi}{\partial w} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

2. Ugyanezen eljárást követve, kiszámíthatjuk az $\bar{a}$ vector divergentiáját

$$\nabla \bar{a} = \operatorname{div} \bar{a} = \lim_{ds=0} \frac{\int\limits_{s} \bar{a} \, d\bar{f}}{ds},$$

melynek eredménye

$$\bar{r}'_w[\bar{r}'_u\,\bar{r}'_v]\,\nabla\bar{a}=[\bar{r}'_v\,\bar{r}'_w]\frac{\partial\bar{a}}{\partial u}+[\bar{r}'_w\,\bar{r}'_u]\frac{\partial\bar{a}}{\partial v}+[\bar{r}'_u\,\bar{r}'_v]\frac{\partial\bar{a}}{\partial w}\quad.\;.\;.\;.\;.\;(7)$$

3. És végül a

$$\lim_{ds=0}\frac{\int_S[df\,\bar{a}]}{ds}$$

határértéke az $\bar{a}$ rotatióját szolgáltatja, melyre kapjuk

$$\bar{r}'_w[\bar{r}'_u\,\bar{r}'_v]\,[\nabla\bar{a}]=\left[[\bar{r}'_v\,\bar{r}'_w]\frac{\partial\bar{a}}{\partial u}\right]+\left[[\bar{r}'_w\,\bar{r}'_u]\frac{\partial\bar{a}}{\partial v}\right]+\left[[\bar{r}'_u\,\bar{r}'_v]\frac{\partial\bar{a}}{\partial w}\right]\quad.\;.\;.\;.\;(8)$$

A (6), (7) és (8) kifejezést egységesen is felírhatjuk a következőképen:

$$\bar{r}'_w[\bar{r}'_u\,\bar{r}'_v]\,\nabla=[\bar{r}'_v\,\bar{r}'_w]\frac{\partial}{\partial u}+[\bar{r}'_w\,\bar{r}'_u]\frac{\partial}{\partial v}+[\bar{r}'_u\,\bar{r}'_v]\frac{\partial}{\partial w}\quad.\;.\;.\;.\;.\;(9)$$

és ezen symbolikus képlet nem más, mint a nabla-művelet ferdeszögű coordinátarendszerben.

Ha pedig a O pontban összefutó három felület normalisait sorban indexekkel jelezzük

$$[\bar{r}'_u\,\bar{r}'_v]=A_1A_2\bar{n}_3,\;[\bar{r}'_v\,\bar{r}'_w]=A_2A_3\bar{n}_1,\;[\bar{r}'_w\,\bar{r}'_u]=A_3A_1\bar{n}_2,$$

a hol még

$$|\bar{r}'_u|=A_1,\;|\bar{r}'_v|=A_2\;\text{ és }\;|\bar{r}'_w|=A_3$$

jelzéseket vezetjük be, akkor a (9) helyett írhatjuk

$$\left.\begin{aligned}&A_2A_3\bar{n}_1\bar{r}'_u\,\nabla=A_3A_1\bar{n}_2\bar{r}'_v\,\nabla=A_1A_3\bar{n}_3\bar{r}'_w\nabla=\\&=A_2A_3\bar{n}_1\frac{\partial}{\partial u}+A_3A_1\bar{n}_2\frac{\partial}{\partial v}+A_1A_2\bar{n}_3\frac{\partial}{\partial w}.\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(10)$$

A 9. pont alapján itt is megállapíthatjuk az $(\bar{a}\nabla)\bar{b}$ kifejezés alakját, mely a (9) képlet szerint lesz:

$$\bar{r}'_w[\bar{r}'_u\,\bar{r}'_v]\,(\bar{a}\nabla)\,\bar{b}=(\bar{a}[\bar{r}'_v\,\bar{r}'_w])\frac{\partial\bar{b}}{\partial u}+(\bar{a}[\bar{r}'_w\,\bar{r}'_u])\frac{\partial\bar{b}}{\partial v}+(\bar{a}[\bar{r}'_u\,\bar{r}'_v])\frac{\partial\bar{b}}{\partial w}\;.\;.\;(11)$$

Mindjárt kiszámíthatjuk a (9) segítségével magának az $\bar{r}=\bar{F}(u,v,w)$ radius-vectornak a divergentiáját és rotatióját.

$$\bar{r}'_w[\bar{r}'_u\,\bar{r}'_v]\operatorname{div}\bar{r}=\bar{r}'_u[\bar{r}'_v\,\bar{r}'_w]+\bar{r}'_v[\bar{r}'_w\,\bar{r}'_u]+\bar{r}'_w[\bar{r}'_u\,\bar{r}'_v]=3\bar{r}'_w[\bar{r}'_u\,\bar{r}'_v],$$

kapjuk tehát

$$\operatorname{div}\bar{r}=3,$$

vagyis minden radius-vectornak divergentiája 3.

Továbbá

$$(\bar{r}'_w[\bar{r}'_u\,\bar{r}'_v])\operatorname{rot}\bar{r}=-\Big[\bar{r}'_u[\bar{r}'_v\,\bar{r}'_w]\Big]-\Big[\bar{r}'_v[\bar{r}'_w\,\bar{r}'_u]\Big]-\Big[\bar{r}'_w[\bar{r}'_u\,\bar{r}'_v]\Big];$$

a jobb oldalon álló tagokat kifejtve a 6. pont (II.) képlete szerint, kapjuk

$$\operatorname{rot}\bar{r}=0,$$

a radius-vector rotatiója tehát eltűnik.

44. A nabla-műveletnek alkalmazása a felületre.

Tekintsük most az $\bar{r} = \overline{F}(u, v)$ felületet úgy, mint az $\bar{r} = \overline{F}(u, v, w)$ rádius-vector által meghatározott vectortér w-paraméter felületét, mely a $w = c$ értékhez tartozik, vagyis

$$\bar{r} = \overline{F}(u, v) = \overline{F}(u, v, c).$$

Ez esetben az előző pontban jelzett műveleteket pl. a w szerint vett differentiálást el kell végeznünk és azután a $w = c$ helyettesítést hajtjuk végre. Az előző pont képleteiben a következő változások létesülnek:

$$[\bar{r}'_u \bar{r}'_v] = D\bar{n}, \quad \bar{n}_3 = \bar{n}, \quad A_1 A_2 = D$$

és így a (9) alapformula a jelen esetben a következővé alakul:

$$(\bar{r}'_w \bar{n}) D \nabla = [\bar{r}'_v \bar{r}'_w] \frac{\partial}{\partial u} + [\bar{r}'_w \bar{r}'_u] \frac{\partial}{\partial v} + D \bar{n} \frac{\partial}{\partial w} \quad \ldots\ldots \ (1)$$

Az előző pontban megállapítottuk már a

$$\operatorname{div} \bar{r} = 3 \text{ és } \operatorname{rot} \bar{r} = 0$$

eredményeket, keressünk most újabb összefüggéseket.

Az (1) alapján írhatjuk

$$(\bar{r}'_w \bar{n}) D \operatorname{div} \bar{n} = \bar{r}'_w \{[\bar{n}'_u \bar{r}'_v] + [\bar{r}'_u \bar{n}'_v]\} + D \bar{n} \bar{n}'_w$$

Ebből a 32. pont (11) képletének felhasználásával és $\bar{n} \bar{n}'_w = 0$ értéket helyettesítve létrejön

$$(\bar{r}'_w \bar{n}) D^2 \operatorname{div} \bar{n} = (\bar{r}'_w \bar{n}) (2 FM - EN - GL)$$

és ebből az esetben, ha $(\bar{r}'_w \bar{n}) \neq 0$, vagyis $\bar{r}'_w$ nem esik a felület érintősíkjába, kapjuk a 34. pont (6) képlete alapján

$$\operatorname{div} \bar{n} = - H \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (2)$$

Az előző pont (11) formulájából a mostani esetünkben kapjuk

$$(\bar{r}'_w \bar{n}) D (\bar{a} \nabla) \bar{b} = (\bar{a} [\bar{r}'_v \bar{r}'_w]) \frac{\partial \bar{b}}{\partial u} + (\bar{a} [\bar{r}'_w \bar{r}'_u]) \frac{\partial b}{\partial v} + D (\bar{a} \bar{n}) \frac{\partial \bar{b}}{\partial w} \quad \ldots\ldots \ (3)$$

Ezen képletből azonnal nyerjük a következő összefüggéseket

$$(\bar{n} \bar{r}'_w) D (\bar{r}'_u \nabla) \bar{r}'_u = (\bar{r}'_u [\bar{r}'_v \bar{r}'_w]) \bar{r}''_{uu} = (\bar{n} \bar{r}'_w) D \bar{r}''_{uu},$$
$$(\bar{n} \bar{r}'_w) D (\bar{r}'_u \nabla) \bar{r}'_v = (\bar{r}'_u [\bar{r}'_v \bar{r}'_w]) \bar{r}''_{uv} = (\bar{n} \bar{r}'_w) D \bar{r}''_{uv},$$
$$(\bar{n} \bar{r}'_w) D (\bar{r}'_v \nabla) \bar{r}'_u = (\bar{r}'_v [\bar{r}'_w \bar{r}'_u]) \bar{r}''_{uv} = (\bar{n} \bar{r}'_w) D \bar{r}''_{uv},$$
$$(\bar{n} \bar{r}'_w) D (\bar{r}'_v \nabla) \bar{r}'_v = (\bar{r}'_v [\bar{r}'_w \bar{r}'_u]) \bar{r}''_{vv} = (\bar{n} \bar{r}'_w) D \bar{r}''_{vv}.$$

Ezen kapcsolatokból ered

$$(\bar{r}'_u \nabla) \bar{r}'_u = \bar{r}''_{uu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (4)$$
$$(\bar{r}'_u \nabla) \bar{r}'_v = (\bar{r}'_v \nabla) \bar{r}'_u = \bar{r}''_{uv} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \ (5)$$
$$(\bar{r}'_v \nabla) \bar{r}'_v = \bar{r}''_{vv} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (6)$$

Az (5) értelmében a 10. pont (5) képletéből kapjuk

$$\operatorname{rot} [\bar{r}'_u \bar{r}'_v] = \bar{r}'_u \operatorname{div} \bar{r}'_v - \bar{r}'_v \operatorname{div} \bar{r}'_u \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \ (7)$$

Ha a vector-tér egyenletében szereplő w paraméter olyan, hogy $\bar{r}'_w$ a felület normalisával párhuzamos, tehát

$$\bar{r}'_w = A_3 \bar{n},$$

akkor az (1) operator alakja a következő lesz:

$$\nabla = \frac{[\bar{r}'_v \bar{n}] \frac{\partial}{\partial u} - [\bar{r}'_u \bar{n}] \frac{\partial}{\partial v}}{D} + \frac{1}{A_3} \bar{n} \frac{\partial}{\partial w} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

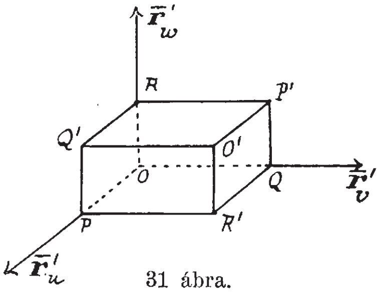
Mint látjuk ez esetben a nabla-művelet két részre bomlik, az első rész

$$\frac{[\bar{r}'_v \bar{n}] \frac{\partial}{\partial u} - [\bar{r}'_u n] \frac{\partial}{\partial v}}{D}$$

csak oly mennyiségeket tartalmaz, melyek tisztán a felület egyenletétől függenek, míg a második részben $\frac{1}{A_3} \bar{n} \frac{\partial}{\partial w}$ oly mennyiségek is szerepelnek, melyek a w-től is függenek. Pár esetben, ha a függvény, melyre a nabla-műveletet alkalmazzuk, olyan, hogy az $\bar{n} \frac{\partial}{\partial w}$ kifejezés eltünik, kapjuk a nabla-kifejezésére az első részt.

45. A nabla-művelet derékszögű görbevonalú coordinátákban.

Vizsgáljuk most azon esetet, midőn az $\bar{r} = \overline{F}(u, v, w)$ vector-tér paraméter-felületei kölcsönösen merőlegesek egymásra, hasonlókép a paraméter-vonalak, vagyis az $\bar{r}'_u$, $\bar{r}'_v$ és $\bar{r}'_w$ vectorok irányai is merőlegesek egymásra. Ezen esetben tehát az $\bar{r} = \overline{F}(u, v, w)$ vector-tér háromszorosan merőleges felületsereg egyenletét adja.



31 ábra.

A 43. pont szerint tehát most írható

$$\bar{r}'_u = A_1 \bar{n}_1,\ \bar{r}'_v = A_2 \bar{n}_2,\ \bar{r}'_w = A_3 \bar{n}_3, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

továbbá

$$[\bar{r}'_u \bar{r}'_v] = A_1 A_2 \bar{n}_3,\ \ [\bar{r}'_v \bar{r}'_w] = A_2 A_3 \bar{n}_1,\ \ [\bar{r}'_w \bar{r}'_u] = A_3 A_1 \bar{n}_2 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

hol az $\bar{n}_1$, $\bar{n}_2$ és $\bar{n}_3$ az O pontból kiinduló jobbsodrású derékszögű triéder egységnyi vectorai. Ezen értékek felhasználásával a nablaművelet kifejezése a 43. pont (9) képletéből

$$\nabla = \frac{1}{A_1}\bar{n}_1\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{A_2}\bar{n}_2\frac{\partial}{\partial v} + \frac{1}{A_3}\bar{n}_3\frac{\partial}{\partial w} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Ezen operator felhasználásával a gradiens, divergentia és rotatió a következő alakú lesz:

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{1}{A_1}\bar{n}_1\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{1}{A_2}\bar{n}_2\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{1}{A_3}\bar{n}_3\frac{\partial\varphi}{\partial w} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$\operatorname{div}\bar{a} = \frac{1}{A_1}\bar{n}_1\frac{\partial\bar{a}}{\partial u} + \frac{1}{A_2}\bar{n}_2\frac{\partial\bar{a}}{\partial v} + \frac{1}{A_3}\bar{n}_3\frac{\partial\bar{a}}{\partial w} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$\operatorname{rot}\bar{a} = \frac{1}{A_1}\left[\bar{n}_1\frac{\partial\bar{a}}{\partial u}\right] + \frac{1}{A_2}\left[\bar{n}_2\frac{\partial\bar{a}}{\partial v}\right] + \frac{1}{A_3}\left[\bar{n}\,\frac{\partial\bar{a}}{\partial w}\right] \quad \ldots \quad (6)$$

Az $\bar{a}$ vector divergentiáját és rotatióját még másképp is előállíthatjuk, ha az $\bar{a}$-nak az $\bar{n}_1$, $\bar{n}_2$ és $\bar{n}_3$ szerinti fölbontásából indulunk ki. Legyen ugyanis

$$\bar{a} = a_1\bar{n}_1 + a_2\bar{n}_2 + a_3\bar{n}_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Alkossuk most meg a

$$\lim_{ds=0} \frac{\int\limits_{s} d\bar{f}\,\bar{a}}{ds} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

kifejezés értékét az $O\,O'$ derékszögű parallelepipedonra nézve, melynek köbtartalma

$$ds = A_1 A_2 A_3\,du\,dv\,dw.$$

A (8) kifejezés számlálójában szereplő összegnek az $OQP'R$ oldallapra vonatkozó része

$$d\bar{f}_1\,\bar{a} = -A_2 A_3\bar{n}_1\,\bar{a}\,dv\,dw = -a_1 A_2 A_3\,dv\,dw,$$

az átellenes oldallapnál a hasonló szorzat

$$a_1 A_2 A_3\,dv\,dw + \frac{\partial a_1 A_2 A_3}{\partial u}\,du\,dv\,dw.$$

Hasonlóképp megalkotva a többi oldallapra a kívánt szorzatokat, összegezve és ds-el osztva, kapjuk

$$\operatorname{div}\bar{a} = \frac{1}{A_1 A_2 A_3}\left(\frac{\partial a_1 A_2 A_3}{\partial u} + \frac{\partial a_2 A_3 A_1}{\partial v} + \frac{\partial a_3 A_1 A_2}{\partial w}\right) \quad \ldots \quad (9)$$

Mielőtt a rot $\bar{a}$ értékét kiszámítanók, pár összefüggést fogunk megállapitani. Az $OQP'R$ oldallapot határoló élek vectorai a következők:

$$\overline{OQ} = A_2 \overline{n}_2\, dv,$$

$$\overline{QP'} = A_3 \overline{n}_3\, dw + \frac{\partial A_3 \overline{n}_3}{\partial v}\, dv\, dw,$$

$$\overline{P'R} = -A_2 \overline{n}_2\, dv - \frac{\partial A_2 \overline{n}_2}{\partial w}\, dv\, dw,$$

$$\overline{RO} = -A_3 \overline{n}_3\, dw.$$

Ezen vectorok zárt idomot határolnak, tehát összegük eltűnik, azaz

$$\frac{\partial A_3 \overline{n}_3}{\partial v} - \frac{\partial A_2 \overline{n}_2}{\partial w} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Hasonlóképen az $ORQ'P$ és $OPR'Q$ oldallapoknál

$$\frac{\partial A_1 \overline{n}_1}{\partial w} - \frac{\partial A_3 \overline{n}_3}{\partial u} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

$$\frac{\partial A_2 \overline{n}_2}{\partial u} - \frac{\partial A_1 \overline{n}_1}{\partial v} = 0 \quad \ldots\ldots:\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Számítsuk ki most a

$$\lim_{ds = o} \frac{\int\limits_S [d\overline{f}\, \overline{a}]}{ds}$$

értékét. Az $OQP'R$ oldallapnál

$$[d\overline{f}_1\, \overline{a}] = -A_2 A_3 [\overline{n}_1\, \overline{a}]\, dv\, dw = -A_2 A_3 (a_2 \overline{n}_3 - a_3 \overline{n}_2)\, dv\, dw,$$

az átellenes oldallapon a hasonló szorzat értéke

$$A_2 A_3 (a_2 \overline{n}_3 - a_3 \overline{n}_2)\, dv\, dw +$$
$$+ \left(A_2\, a_2 \frac{\partial A_3 \overline{n}_3}{\partial u} - A_3\, a_3 \frac{\partial A_2 \overline{n}_2}{\partial u} + A_3 \overline{n}_3 \frac{\partial A_2\, a_2}{\partial u} - A_2 \overline{n}_2 \frac{\partial A_3\, a_3}{\partial u}\right) du\, dv\, dw.$$

Összeadva e két kifejezést és helyettesítve a (11) és (12) idevágó értékeit, kapjuk

$$\left(\overline{n}_3 A_3 \frac{\partial A_2\, a_2}{\partial u} - \overline{n}_2 A_2 \frac{\partial A_3\, a_3}{\partial u} + A_2\, a_2 \frac{\partial A_1 \overline{n}_1}{\partial w} - A_3\, a_3 \frac{\partial A_1 \overline{n}_1}{\partial v}\right) du\, dv\, dw.$$

Megalkotva a másik két pár oldallapra a hasonló kifejezéseket és összeadva elvégezzük a (10), (11) és (12) nyujtotta egyszerüsítéseket, kapjuk az $\overline{a}$ rotatiójára

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \overline{a} = \overline{n}_1 \frac{1}{A_2 A_3}\left(\frac{\partial A_3\, a_3}{\partial v} - \frac{\partial A_2\, a_2}{\partial w}\right) + \\ + \overline{n}_2 \frac{1}{A_3 A_1}\left(\frac{\partial A_1\, a_1}{\partial w} - \frac{\partial A_3\, a_3}{\partial u}\right) + \overline{n}_3 \frac{1}{A_1 A_2}\left(\frac{\partial A_2\, a_2}{\partial u} - \frac{\partial A_1\, a_1}{\partial v}\right) \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

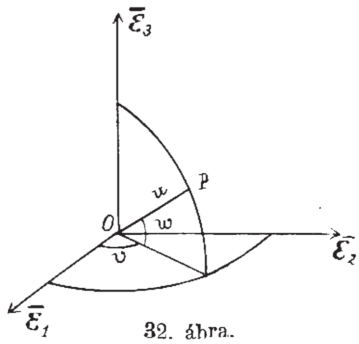
Ha a grad φ vectorra ismét alkalmazzuk a ∇ műveletet scalarisan, csak a (9) egyenlőségbe kell az

$$a_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad a_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \quad a_3 = \frac{1}{A_3} \frac{\partial \varphi}{\partial w}$$

értékeket helyettesíteni. Kapjuk tehát

$$\operatorname{div} \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi = \frac{1}{A_1 A_2 A_3} \left\{ \frac{\partial \dfrac{A_2 A_3}{A_1} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}}{\partial u} + \frac{\partial \dfrac{A_3 A_1}{A_2} \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}}{\partial v} + \frac{\partial \dfrac{A_1 A_2}{A_3} \dfrac{\partial \varphi}{\partial w}}{\partial w} \right\} \quad (14)$$

Ezen kifejezés voltaképp a Laplace-féle operator derékszögű görbevonalú coordinátákban.*



32. ábra.

A levezetettek alkalmazásaként írjuk fel pár derékszögű hálózatra vonatkozólag a nablaoperatio mennyiségeit.

1. Háromszorosan merőleges felületsereget szolgáltat a gömbcoordináták hálózata. Ha az ($\bar\varepsilon_1$, $\bar\varepsilon_2$) sík az egyenlítő síkját képviseli, $\bar\varepsilon_1$-től számítjuk a földrajzi hosszúságot, $\bar\varepsilon_3$ pedig az északi polus felé mutat, akkor a felületsereg egyenletét

$$\bar r = u \cos v \cos w \, \bar\varepsilon_1 + u \sin v \cos w \, \bar\varepsilon_2 + u \sin w \, \bar\varepsilon_3$$

szolgáltatja. Ezen kifejezésben u jelenti a meghatározott pont távolságát a kezdőponttól, v a földrajzi hosszúságát és w az északi szélességét.

Ez esetben

$$A_1 = 1, \quad A_2 = u \cos w, \quad A_3 = u$$

és

$$\bar n_1 = \cos v \cos w \, \bar\varepsilon_1 + \sin v \cos w \, \bar\varepsilon_2 + \sin w \, \bar\varepsilon_3,$$
$$\bar n_2 = - \sin v \, \bar\varepsilon_1 + \cos v \, \bar\varepsilon_2,$$
$$\bar n_3 = - \cos v \sin w \, \bar\varepsilon_1 - \sin v \sin w \, \bar\varepsilon_2 + \cos w \, \bar\varepsilon_3.$$

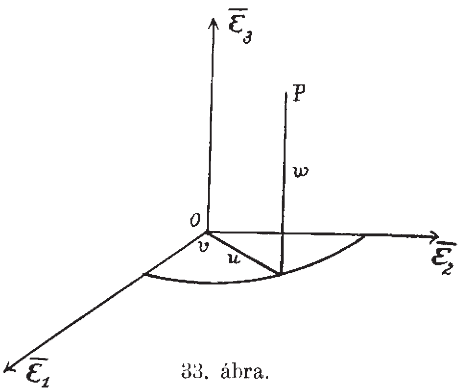
2. Hengercoordinátákat kapunk az $\bar r = u \cos v \, \bar\varepsilon_1 + u \sin v \, \bar\varepsilon_2 + w \, \bar\varepsilon_3$ vectortér segítségével. Ebben u jelenti a meghatározandó pont távolságát a z tengelytől, v azon szöget, melyet ezen távolság bezár az x tengellyel és w a vizsgált pont távolságát az (xy) síktól.

Ez esetben

$$A_1 = 1, \quad A_2 = u, \quad A_3 = 1$$

és $\bar n_1 = \cos v \, \bar\varepsilon_1 + \sin v \, \bar\varepsilon_2,$

$$\bar n_2 = - \sin v \, \bar\varepsilon_1 + \cos v \, \bar\varepsilon_2,$$
$$\bar n_3 = \bar\varepsilon_3.$$



33. ábra.

---

* v. Ignatowsky W.: Die Vektoranalysis... I. 1909. p. 77—81. Gans R.: Einführung in die Vektoranalysis. Teubner. 1905. p. 54.

3. Végül a Descartes-féle hálózatot megkapjuk az

$$\bar r = u\,\bar\varepsilon_1 + v\,\bar\varepsilon_2 + w\,\bar\varepsilon_3$$

vectortérrel, ha az x, y, z coordinátákat az u, v, w betükkel helyettesítjük. Jelen esetben

$$A_1 = 1, \quad A_2 = 1, \quad A_3 = 1$$

$$\bar n_1 = \bar\varepsilon_1, \quad \bar n_2 = \bar\varepsilon_2, \quad \bar n_3 = \bar\varepsilon_3$$

és a nabla-műveletre kapjuk ugyanazon eredményeket, melyeket a 9. pontban már meghatároztunk.

46. A felület differentiál-operátorai.

A 44-ik pontban láttuk, hogy azon esetben, ha $\bar r'_w$ párhuzamos a felület normalisával, a nabla-operator egyik része független a w-től. Ezen differential-operatort a következőkben ∇_1 symbolummal jelöljük, tehát

$$\nabla_1 = \frac{[\bar n\,\bar r'_u]\frac{\partial}{\partial v} - [\bar n\,\bar r'_v]\frac{\partial}{\partial u}}{D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Ezen operator mellett még a következő kettőt fogjuk felhasználni:

$$\nabla_2 = \frac{\bar r'_u\frac{\partial}{\partial v} - \bar r'_v\frac{\partial}{\partial u}}{D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\nabla_3 = \frac{\bar n'_u\frac{\partial}{\partial v} - \bar n'_v\frac{\partial}{\partial u}}{D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Az (1) operatort az

$$[\bar n\,\bar r'_u] = \frac{E\bar r'_v - F\bar r'_u}{D}$$

és

$$[\bar n\,\bar r'_v] = \frac{F\bar r'_v - G\bar r'_u}{D}$$

felhasználásával írhatjuk még

$$\nabla_1 = \frac{E\bar r'_v\frac{\partial}{\partial v} - F\left(\bar r'_u\frac{\partial}{\partial v} + \bar r'_v\frac{\partial}{\partial u}\right) + G\bar r'_u\frac{\partial}{\partial u}}{D^2} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Mindenekelőtt bebizonyítjuk, hogy az (1), (2) és (3) alatt lévő operatorok mindegyike a paraméter változtatásával szemben invariabilis. Ha az $\bar r = \bar F(u,v)$ felület egyenletébe az u, v változók helyébe az

$$u = A(u_1, v_1), \quad v = B(u_1, v_1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

összefüggés alapján az új u_1, v_1 paramétereket vezetjük be, akkor a felület egyenlete

$$\bar{r} = \overline{F_1}\,(u_1,\ v_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

lesz és a paramétervonalak most

$$u_1 = \mathfrak{A}\,(u, v) = \text{const.}$$
$$v_1 = \mathfrak{B}\,(u, v) = \text{const.}$$

lesznek, hol $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ az (5) megoldásából létrejövő függvények. Ha most a felülethez tartozó valamely $\varphi\,(u, v)$ függvényre az (5) substitutiót alkalmazzuk, kapjuk

$$\varphi\,(u,\ v) = \varphi\Big(A\,(u_1, v_1),\ B\,(u_1, v_1)\Big) = \varphi_1\,(u_1, v_1)$$

és ebből, ha a

$$\frac{\partial A}{\partial u_1} = A_1,\quad \frac{\partial A}{\partial v_1} = A_2,\quad \frac{\partial B}{\partial u_1} = B_1,\quad \frac{\partial B}{\partial v_1} = B_2$$

egyszerübb jelzést vezetjük be, írhatjuk a következő egyenlőségeket;

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} &= A_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + B_1 \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial v_1} &= A_2 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + B_2 \frac{\partial \varphi}{\partial v}. \end{aligned}\right. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Ép így kapjuk a (6) alapján

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_1} &= A_1 \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} + B_1 \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}, \\ \frac{\partial \bar{r}}{\partial v_1} &= A_2 \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} + B_2 \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

ebből ered, ha az $A_1 B_2 - A_2 B_1 = \delta$ rövidítést alkalmazzuk

$$\left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial u_1},\ \frac{\partial \bar{r}}{\partial v_1}\right] = \delta \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial u},\ \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}\right],$$

az absolut értékekre pedig kapjuk

$$D_1 = \delta\, D \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Ez alapon most igazolhatjuk, hogy az (5) helyettesítéssel a három jelzett operator nem változik. Az új paraméterekben ugyanis

$$\nabla_1 \varphi_1 = \frac{\left[\bar{n}\,\frac{\partial \bar{r}}{\partial u_1}\right] \frac{\partial \varphi_1}{\partial v_1} - \left[\bar{n}\,\frac{\partial \bar{r}}{\partial v_1}\right] \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}}{D_1},$$

$$\nabla_2 \varphi_1 = \frac{\frac{\partial \bar{r}}{\partial u_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v_1} - \frac{\partial \bar{r}}{\partial v_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}}{D_1},$$

$$\nabla_3 \varphi_1 = \frac{\frac{\partial \bar{n}}{\partial u_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v_1} - \frac{\partial \bar{n}}{\partial v_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}}{D_1}.$$

Helyettesítve ezek mindegyikébe a (7) és (8) eredményeit, ezen kifejezésekből egyszerű rövidítésekkel rájutunk a $\triangle_1 \varphi$, $\nabla_2 \varphi$

és $\nabla_3 \varphi$ formulákra, a mivel igazoltuk ezen operatorok változatlanságát.

Hasonló módon, ha az u, v paraméterek egy $\bar{a}\,(u, v)$ vectorfüggvényén végezzük el az (5) substitutiót, kapjuk

$$\bar{a}\,(u,\ v) = \bar{a}_1\,(u_1,\ v_1)$$

és ebből

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\,\bar{a}_1}{\partial\,u_1} &= A_1\frac{\partial\,\bar{a}}{\partial\,u} + B_1\frac{\partial\,\bar{a}}{\partial\,v}, \\ \frac{\partial\,\bar{a}_1}{\partial\,v_1} &= A_2\frac{\partial\,\bar{a}}{\partial\,u} + B_2\frac{\partial\,\bar{a}}{\partial\,v}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Végezzük most el az $\bar{a}_1\,(u_1,\ v_1)$ vectoron a három operatort scalarisan, kapjuk

$$\nabla_1\,\bar{a}_1 = \frac{\left[\bar{n}\,\frac{\partial\bar{r}_1}{\partial u_1}\right]\frac{\partial\,\bar{a}_1}{\partial\,v_1} - \left[\bar{n}\,\frac{\partial\bar{r}_1}{\partial v_1}\right]\frac{\partial\,\bar{a}_1}{\partial\,u_1}}{D_1},$$

$$\nabla_2\,\bar{a}_1 = \frac{\frac{\partial\bar{r}}{\partial u_1}\frac{\partial\bar{a}_1}{\partial v_1} - \frac{\partial\bar{r}}{\partial v_1}\frac{\partial\bar{a}_1}{\partial u_1}}{D_1},$$

$$\nabla_2\,\bar{a}_1 = \frac{\frac{\partial\bar{n}}{\partial u_1}\frac{\partial\bar{a}_1}{\partial v_1} - \frac{\partial\bar{n}}{\partial v_1}\frac{\partial\bar{a}_1}{\partial u_1}}{D_1}.$$

Helyettesítve mindháromba a (8) és (10) értékeit, rájutunk a $\nabla_1\,\bar{a}$, $\nabla_2\,\bar{a}$, $\nabla_3\,\bar{a}$ mennyiségekre. Ismét igazoltuk tehát a felvett operatorok változatlanságát. Ezekkel teljesen hasonló módon igazolhatjuk még a $[\nabla_1\,\bar{a}]$, $[\nabla_2\,\bar{a}]$ és $[\nabla_3\,\bar{a}]$ invarians voltát is.

Az eddigi három elsőrendű differentiál-operatorok mellett még egy másodrendüt fogunk bevezetni, mely a következő:

$$\nabla_4 = \frac{\frac{\partial^2\,\bar{r}}{\partial u^2}\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^2 - 2\,\frac{\partial^2\,\bar{r}}{\partial u\,\partial v}\,\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial\bar{r}}{\partial v^2}\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^2}{D^2} \quad \ldots\ldots (11)$$

Ezen operator szintén invariabilis a paraméterek változtatásával szemben. Írjuk fel ugyanis az új paraméterekben:

$$\nabla_4 = \frac{\frac{\partial^2\,\bar{r}}{\partial u_1{}^2}\left(\frac{\partial}{\partial v_1}\right)^2 - 2\,\frac{\partial^2\,\bar{r}}{\partial u_1\,\partial v_1}\,\frac{\partial}{\partial u_1}\,\frac{\partial}{\partial v_1} + \frac{\partial^2\,\bar{r}}{\partial v_1{}^2}\left(\frac{\partial}{\partial\,u_1}\right)^2}{D_1{}^2}.$$

Ezen egyenletbe most a (7) és (8)-ból nyerhető következő kifejezéseket kell helyettesíteni:

$$\frac{\partial^2\,\bar{r}}{\partial u_1{}^2} = A_1{}^2\,\frac{\partial^2\,\bar{r}}{\partial u^2} + 2\,A_1\,B_1\,\frac{\partial^2\,\bar{r}}{\partial u\,\partial v} + B_1{}^2\,\frac{\partial^2\,\bar{r}}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u_1 \partial v_1} = A_1 A_2 \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u^2} + (A_1 B_2 + A_2 B_1) \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u \partial v} + B_1 B_2 \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial {v_1}^2} = {A_2}^2 \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial v^2} + 2 A_2 B_2 \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u \partial v} + {B_2}^2 \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial v^2};$$

és

$$\left(\frac{\partial}{\partial v_1}\right)^2 = {A_2}^2 \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^2 + 2 A_2 B_2 \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} + {B_2}^2 \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \frac{\partial}{\partial v_1} = A_1 A_2 \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^2 + (A_1 B_2 + A_2 B_1) \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} + B_1 B_2 \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^2,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)^2 = {A_1}^2 \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^2 + 2 A_1 B_1 \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} + {B_1}^2 \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^2.$$

Rendezés után rájutunk a (11) képletre és így igazoljuk a ∇_4 operator változatlanságát.

47. A felület differentiál-paraméterei.

Láttuk, hogy az előző pontban meghatározott négy differentiál-operator a paraméterek változtatásával szemben invariabilis. Ez alapon mondhatjuk, hogy a felület mindazon mennyiségei, melyek ezen három operator segítségével kifejezhetők, szintén invariabilisak. És ezen kifejezéseket, mivel differentiálhányadosokat is tartalmaznak, a felület *differentiál-paramétereinek* nevezzük.

Először is alkalmazzuk a ∇_1, ∇_2 és ∇_3 műveletet a scalaris $\varphi(u, v)$ függvényre.

$$\nabla_1 \varphi = \frac{E \bar{r}'_v \varphi'_v - F(\bar{r}'_u \varphi'_v + \bar{r}'_v \varphi'_u) + G \bar{r}'_u \varphi'_u}{D^2}, \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\nabla_2 \varphi = \frac{\bar{r}'_u \varphi'_v - \bar{r}'_v \varphi'_u}{D}, \quad \ldots\ldots (2)$$

$$\nabla_3 \varphi = \frac{\bar{n}'_u \varphi'_v - \bar{n}'_v \varphi'_u}{D}. \quad \ldots\ldots (3)$$

Ezen kifejezések mindegyike vector és pedig mindegyik a felület érintősíkjában fekszik, mert az $\bar{n}$-el való scalaris szorzata mindegyiknek eltűnik.

Az utolsó három képletből kapjuk most már a következő differentiál-paramétereket

$$\triangle_1 \varphi \nabla_1 \psi = \triangle_2 \varphi \triangle_2 \psi = \frac{E \varphi'_v \psi'_v - F(\varphi'_v \psi'_u + \varphi'_u \psi'_v) + G \varphi'_u \psi'_u}{D^2}. \quad (4)$$

Ebből ha $\varphi = \psi$, kapjuk

$$(\nabla_1 \varphi)^2 = (\nabla_2 \varphi)^2 = \frac{E {\varphi'_v}^2 - 2 F \varphi'_u \varphi'_v + G {\varphi'_u}^2}{D^2}. \quad \ldots (5)$$

Hasonló módon a (2) és (3) összeszorzásából ered:

$$\nabla_2 \varphi \, \nabla_3 \psi = \nabla_2 \psi \, \nabla_3 \varphi = -\frac{L \varphi'_v \psi'_v - M(\varphi'_v \psi'_u + \varphi'_u \psi'_v) + N \varphi'_u \psi'_u}{D^2}. \quad (6)$$

$\varphi = \psi$ esetében

$$\nabla_2 \varphi \, \nabla_3 \varphi = -\frac{L \varphi'^2_v - 2 M \varphi'_u \varphi'_v + N \varphi'^2_u}{D^2}. \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

A 32. pont (9_1) alapján kapjuk a (2)-ből

$$[\bar{n}, \nabla_2 \varphi] = \nabla_1 \varphi$$

és ebből

$$[\bar{n}, \nabla_1 \varphi] = - \nabla_2 \varphi.$$

A (2)-ből megállapithatjuk még a következő összefüggéseket:

$$[\nabla_2 \varphi, \nabla_2 \psi] = \frac{\varphi'_u \psi'_v - \varphi'_v \psi'_u}{D} \bar{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

vagy ebből

$$\bar{n} [\triangle_2 \varphi \, \triangle_2 \psi] = \frac{\varphi'_u \psi'_v - \varphi'_v \psi'_u}{D}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Ugyanezen eredményt kapjuk még így is

$$\nabla_1 \varphi \, \nabla_2 \psi = - \nabla_1 \psi \, \nabla_2 \varphi = \frac{\varphi'_u \psi'_v - \varphi'_v \psi'_u}{D}. \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Ebből egyúttal következik

$$\triangle_1 \varphi \, \triangle_2 \varphi = 0,$$

tehát $\nabla_1 \varphi$ és $\nabla_2 \varphi$ egymásra merőlegesek az érintősíkban. További érdekes összefüggés a következő:

$$[\nabla_1 \varphi \, \nabla_2 \psi] = [\nabla_1 \psi \, \nabla_2 \varphi] = \frac{E \varphi'_v \psi'_v - F(\varphi'_u \psi'_v + \varphi'_v \psi'_u) + G \varphi'_u \psi'_u}{D^2} \bar{n} \quad (10)$$

és ebből kapjuk

$$[\triangle_1 \varphi \, \triangle_2 \varphi] = \frac{E \varphi'^2_v - 2 F \varphi'_u \varphi'_v + G \varphi'^2_u}{D^2} \bar{n}. \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

Végül a ∇_2 kétszeri alkalmazásával kapjuk

$$\nabla_2^2 \varphi = \frac{\bar{r}'_u \dfrac{\partial \nabla_2 \varphi}{\partial v} - \bar{r}'_v \dfrac{\partial \nabla_2 \varphi}{\partial u}}{D} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Ezen kifejezés már scalaris.*

---

* A levezetett differentiál-paraméterek közül a (4), (5) és (12) az úgynevezett Beltrami-féle differentiál-paraméterek, a (9) pedig a Darboux-féle. Kommerell V. u. K.: Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen. II. Band. 1903. p. 103—104.

Scheffers G.: Anwendung... II. B. 1902. p. 373.

Rothe R.: Anwendungen der Vektoranalysis auf Differentialgeometrie. Jahresbericht... 21. B. 1912. p. 260.

Alkalmazzuk most a ∇_1, ∇_2, ∇_3 operatorokat vectormennyiségre. Az alapképletek a következők:

$$\nabla_1 \bar{a} = \frac{E \bar{r}'_v \bar{a}'_v - F(\bar{r}'_u \bar{a}'_v + \bar{r}'_v \bar{a}'_u) + G \bar{r}'_u \bar{a}'_u}{D^2} \quad \ldots \quad (13)$$

$$\nabla_2 \bar{a} = \frac{\bar{r}'_u \bar{a}'_v - \bar{r}'_v \bar{a}'_u}{D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

$$\nabla_3 \bar{a} = \frac{\bar{n}'_u \bar{a}'_v - \bar{n}'_v \bar{a}'_u}{D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

$$[\nabla_1 \bar{a}] = \frac{E[\bar{r}'_v \bar{a}'_v] - F\{[\bar{r}'_u \bar{a}'_v] + [\bar{r}'_v \bar{a}'_u]\} + G[\bar{r}'_u \bar{a}'_u]}{D^2} \quad \ldots \quad (16)$$

$$[\nabla_2 \bar{a}] = \frac{[\bar{r}'_u \bar{a}'_v] - [\bar{r}'_v \bar{a}'_u]}{D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

$$[\nabla_3 \bar{a}] = \frac{[\bar{n}'_u \bar{a}'_v] - [\bar{n}'_v \bar{a}'_u]}{D}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Ha ezen három utóbbi képletet scalarisan szorozzuk az $\bar{n} = \frac{[\bar{r}'_u \bar{r}'_v]}{D}$ vectorral, a 6. pont (III.) képlete szerint eredményünk írható

$$\bar{n}[\nabla_1 \bar{a}] = -\nabla_2 \bar{a},$$
$$\bar{n}[\nabla_2 \bar{a}] = \nabla_1 \bar{a},$$
$$\bar{n}[\nabla_3 \bar{a}] = -\frac{L(\bar{r}'_v \bar{a}'_v) - M(\bar{r}'_u \bar{a}'_v + \bar{r}'_v \bar{a}'_u) + N(\bar{r}'_u \bar{a}'_u)}{D^2}.$$

Egyszerű szorzással igazolhatjuk a következőket:

$$\nabla_1 \varphi [\nabla_1 \bar{a}] = \nabla_2 \varphi [\nabla_2 \bar{a}] = \frac{\varphi'_u \bar{a}'_v - \varphi'_v \bar{a}'_u}{D} \bar{n} \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

$$\nabla_2 \varphi [\nabla_1 \bar{a}] = -\nabla_1 \varphi [\nabla_2 \bar{a}] = \frac{E \varphi'_v \bar{a}'_v - F(\varphi'_u \bar{a}'_v + \varphi'_v \bar{a}'_u) + G \varphi'_u \bar{a}'_u}{D^2} \bar{n}. \quad (20)$$

A felület vectoraira alkalmazva ez operatorokat, a következő eredményekre jutunk:

$$\left.\begin{aligned} \nabla_1 \bar{r} = 2, \quad \nabla_2 \bar{r} = 0, \quad \nabla_3 \bar{r} = 0, \\ [\nabla_1 \bar{r}] = 0, \ [\nabla_2 \bar{r}] = 2\bar{n}, \ [\nabla_3 \bar{r}] = -\frac{EN - 2FM + GL}{D^2} = -H. \end{aligned}\right\} \ (21)$$

Ez utóbbit a 32. pont (11) és 34. pont (6) egyenletei alapján írhattuk.

Hasonló módon kapjuk a következőket:

$$\left.\begin{aligned} \nabla_1 \bar{n} = -H, \quad \nabla_2 \bar{n} = 0, \quad \nabla_3 \bar{n} = 0, \\ [\nabla_1 \bar{n}] = 0, \ [\nabla_2 \bar{n}] = -H\bar{n}, \ [\nabla_3 \bar{n}] = 2\frac{[\bar{n}'_u \bar{n}'_v]}{D} = 2K\bar{n}. \end{aligned}\right\} \ (22)$$

$$\left.\begin{aligned} \nabla_1 \bar{r}'_u &= \frac{E n' - F(m' + n) + G m}{D^2} = p' - q = \frac{\partial \log D}{\partial u}, \\ \nabla_1 \bar{r}'_v &= \frac{E n'' - F(m'' + n') + G m'}{D^2} = p'' - q' = \frac{\partial \log D}{\partial v}. \end{aligned}\right\} (23)$$

A ∇_1-et alkalmazzuk most vectorképen az $\bar{r}'_u$-ra, ez esetben kapjuk

$$[\nabla_1 \bar{r}'_u] = \frac{E[\bar{r}'_v \bar{r}''_{uv}] - F\{[\bar{r}'_u \bar{r}''_{uv}] + [\bar{r}'_v \bar{r}''_{uu}]\} + G[\bar{r}'_u \bar{r}''_{uu}]}{D^2}.$$

Helyettesítsük ezen kifejezésbe a megfelelő értékeket a 32. pont (32) képletéből, rendezés után rájutunk az egyszerű

$$[\nabla_1 \bar{r}'_u] = \frac{(n - m')\bar{n} + M\bar{r}'_u - L\bar{r}'_v}{D}$$

összefüggésre. Ugyanígy kapjuk

$$[\nabla_1 \bar{r}'_v] = \frac{(n' - m'')\bar{n} + N\bar{r}'_u - M\bar{r}'_v}{D}.$$

Ezen két egyenlőségből a 32. pont (1) és (11) képletei alapján írhatjuk

$$\bar{r}'_u [\nabla_1 \bar{r}'_u] = \frac{EM - FL}{D} = \bar{n}[\bar{n}'_u \bar{r}'_u],$$

$$\bar{r}'_v [\nabla_1 \bar{r}'_u] = \frac{FM - GL}{D} = \bar{n}[\bar{n}'_u \bar{r}'_v],$$

$$\bar{r}'_u [\nabla_1 \bar{r}'_v] = \frac{EN - FM}{D} = \bar{n}[\bar{n}'_v \bar{r}'_u],$$

$$\bar{r}'_v [\nabla_1 \bar{r}'_v] = \frac{FN - GM}{D} = \bar{n}[\bar{n}'_v \bar{r}'_v].$$

Végezzük most el a ∇_1 operatiót egy a felület érintősíkjában fekvő egységnyi vectoron. Legyen ezen vector

$$\bar{\alpha} = \bar{r}'_u \frac{du}{ds} + \bar{r}'_v \frac{dv}{ds},$$

hol *du* és *dv* adja a felületi vonal irányát és *ds* a hosszát.

Az előző pont (1) képlete szerint

$$[\nabla_1 \bar{\alpha}] = \frac{\Big[\bar{\alpha}'_u [\bar{n}\,\bar{r}'_v]\Big] - \Big[\bar{\alpha}'_v [\bar{n}\,\bar{r}'_u]\Big]}{D},$$

vagy a 6. pont (II.) képlete szerint kifejtve

$$[\nabla_1 \bar{\alpha}] = \frac{(\bar{\alpha}'_u \bar{r}'_v)\bar{n} - (\bar{\alpha}'_u \bar{n})\bar{r}'_v - (\bar{\alpha}'_v \bar{r}'_u)\bar{n} + (\bar{\alpha}'_v \bar{n})\bar{r}'_u}{D}.$$

Szorozzuk meg ezen vectort scalarisan az $\bar{\alpha}$-val, mivel $\bar{\alpha}$ az érintősíkban van $\bar{n}\,\bar{\alpha} = 0$, tehát

$$\bar{\alpha}[\nabla_1 \bar{\alpha}] = \frac{(\bar{\alpha}'_v \bar{n})(\bar{r}'_u \bar{\alpha}) - (\bar{\alpha}'_u \bar{n})(\bar{r}'_v \bar{\alpha})}{D}.$$

Helyettesítve ezen kifejezésbe az $\bar{\alpha} = \bar{r}'_u \frac{du}{ds} + \bar{r}'_v \frac{dv}{ds}$

és
$$\bar{\alpha}'_u = \bar{r}''_{uu} \frac{du}{ds} + \bar{r}''_{uv} \frac{dv}{ds},$$
$$\bar{\alpha}'_v = \bar{r}''_{uv} \frac{du}{ds} + \bar{r}''_{vv} \frac{dv}{ds}$$
értékeket, rendezés után kapjuk
$$\bar{\alpha}[\nabla_1 \bar{\alpha}] = \frac{(EM - FL)\, du^2 + (EN - GL)\, du\, dv + (FN - GM)\, dv^2}{D\, ds^2}.$$

Ezen kifejezés negativ értéke a 33. pont (15) szerint a felület $\bar{\alpha}$ iránynyal megadott vonalelemének geodetikus torsióját szolgáltatja:
$$\frac{1}{\rho'_2} = -\bar{\alpha}[\nabla_1 \bar{\alpha}] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

A $\nabla_2 \varphi$ és $\triangle_3 \psi$ vectorszorzatából kapjuk
$$[\nabla_2 \varphi \nabla_3 \psi] = \frac{[\bar{r}'_u \bar{n}'_u]\varphi'_v \psi'_v - [\bar{r}'_u \bar{n}'_v]\varphi'_v \psi'_u - [\bar{r}'_v \bar{n}'_u]\varphi'_u \psi'_v + [\bar{r}'_v \bar{n}'_v]\varphi'_u \psi'_u}{D^2}. \quad (25)$$

Helyettesítve a 32. pont (11) képleteiből az értékeket
$$[\nabla_2 \varphi\ \nabla_3 \psi] = \frac{(FL - EM)\,\varphi'_v \psi'_v - (FM - EN)\,\varphi'_v \psi'_u}{D^3}\,\bar{n} +$$
$$+ \frac{-(GL - FM)\,\varphi'_u \psi'_v + (GM - FN)\,\varphi'_u \psi'_u}{D^3}\,\bar{n}.$$

Hasonlókép
$$[\nabla_2 \psi\, \nabla_3 \varphi] = \frac{(FL - EM)\,\varphi'_v \psi'_v - (FM - EN)\,\varphi'_u \psi'_v}{D^3}\,\bar{n} +$$
$$+ \frac{-(GL - FM)\,\varphi'_v \psi'_u + (GM - FN)\,\varphi'_u \psi'_u}{D^3}\,\bar{n};$$
e kettőből
$$[\nabla_2 \psi\ \nabla_3 \varphi] - [\nabla_2 \varphi\ \nabla_3 \psi] = \frac{EN - 2\,FM + GL}{D^3}\,(\varphi'_u \psi'_v - \varphi'_v \psi'_u)\,\bar{n} =$$
$$= H\,\frac{\varphi'_u \psi'_v - \varphi'_v \psi'_u}{D}\,\bar{n} = H\,[\nabla_2 \varphi\ \nabla_2 \psi].$$

A (25)-ből ered még
$$[\nabla_2 \varphi \nabla_3 \varphi] = \frac{(FL - EM)\,\varphi'^2_v - (GL - EN)\,\varphi'_u \varphi'_v + (GM - FN)\,\varphi'^2_u}{D^3}\,\bar{n}. \quad (26)$$

A másodrendű operator alkalmazásaként, kapjuk
$$\nabla_4 \varphi = \frac{\bar{r}''_{uu}\,\varphi'^2_v - 2\,\bar{r}''_{uv}\,\varphi'_u\,\varphi'_v + \bar{r}''_{vv}\,\varphi'^2_u}{D^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$
és
$$\nabla_4 \bar{a} = \frac{\bar{r}''_{uu}\,(\bar{a}'^2_v) - 2\,\bar{r}''_{uv}\,(\bar{a}'_u\,\bar{a}'_v) + \bar{r}''_{vv}\,(\bar{a}'^2_u)}{D^2}.$$

A felület radius-vectorára alkalmazva

$$\triangle_4 \bar{r} = \frac{G \bar{r}''_{uu} - 2 F \bar{r}''_{uv} + E \bar{r}'_{vv}}{D^2}.$$

Szorozzuk most a $\nabla_2 \varphi$ és $\nabla_4 \varphi$ kifejezéseket vectorképen:

$$[\nabla_2 \varphi \, \nabla_4 \varphi] = \frac{[\bar{r}'_u \bar{r}''_{uu}] \varphi'^2_v - 2 [\bar{r}'_u \bar{r}''_{uv}] \varphi'_u \varphi'_v + [\bar{r}'_u \bar{r}''_{vv}] \varphi'^2_u}{D^3} \varphi'_v -$$

$$- \frac{[\bar{r}'_v \bar{r}''_{uu}] \varphi'_v - 2 [\bar{r}'_v \bar{r}''_{uv}] \varphi'_u \varphi'_v + [\bar{r}'_v \bar{r}''_{vv}] \varphi'^2_u}{D^3} \varphi'_u.$$

Helyettesítsük ezen egyenletbe a 32. pont (32) kifejezéseit, kapjuk

$$[\nabla_2 \varphi \, \nabla_4 \varphi] =$$

$$= \frac{(p \varphi'^2_v - 2 p' \varphi'_u \varphi'_v + p'' \varphi'^2_u) \varphi'_v - (q \varphi'^2_v - 2 q' \varphi'_u \varphi'_v + q'' \varphi'^2_u) \varphi'_u}{D^2} \bar{n} +$$

$$+ \frac{[\bar{r}'_u \bar{n}] \varphi'_v - [\bar{r}'_v \bar{n}] \varphi'_u}{D} \cdot \frac{L \varphi'^2_v - 2 M \varphi'_u \varphi'_v + N \varphi'^2_u}{D^2};$$

e helyett még egyszerübben írhatjuk

$$[\nabla_2 \varphi \, \nabla_4 \varphi] - (\nabla_2 \varphi \, \nabla_3 \varphi) \nabla_1 \varphi =$$

$$= \frac{(p \varphi'^2_v - 2 p' \varphi'_u \varphi'_v + p'' \varphi'^2_u) \varphi'_v - (q \varphi'_v - 2 q' \varphi'_u \varphi'_v + q'' \varphi'^2_u) \varphi'_u}{D^2} \bar{n}.$$

Ebből ismét az $\bar{n}$-el való scalaris szorzás után

$$\bar{n} [\nabla_2 \varphi \, \nabla_4 \varphi] =$$

$$= \frac{(p \varphi'^2_v - 2 p' \varphi'_u \varphi'_v + p'' \varphi'^2_u) \varphi'_v - (q \varphi'_v - 2 q' \varphi'_u \varphi'_v + q'' \varphi'^2_u) \varphi'_u}{D^2} \quad (28)$$

48. A differentiál-paraméterek alkalmazása.

Mint láttuk, a felület differentiál-paraméterei nem változnak, ha a felület egyenletébe más paramétereket hozunk és így nem változnak azon kifejezések sem, melyek differentiál-paraméterekkel alkothatók meg.

A következőkben iparkodunk a felülethez tartozó főbb mennyiségeket differentiál-paraméterekkel előállítani. Eljárásunk a következő lesz. Az $\bar{r} = \bar{F}(u, v)$ felületen a paraméter-vonalak $u =$ const. és $v =$ const, az

$$u = A(u_1, v_1) \text{ és } v = B(u_1, v_1)$$

substitutióval azonban elérhetjük, hogy az

$$u_1 = \varphi(u, v) = \text{const. és } v_1 = \psi(u, v) = \text{const.}$$

vonalak lesznek a paraméter-vonalak. Az előbbiekre vonatkozólag az alapmennyiségeket az eddig használt módon jelöljük, az $u_1 = \varphi$

és $v_1 = \psi$ paraméter-vonalak esetében pedig indexxel látjuk el az alapmennyiségeket. Az (u, v) paraméter-vonalak esetében írhatjuk

$$\triangle_2 u = -\frac{\bar{r}'_v}{D}, \quad \nabla_2 v = \frac{\bar{r}'_u}{D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\triangle_3 u = -\frac{\bar{n}'_v}{D}, \quad \nabla_3 v = \frac{\bar{n}'_u}{D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Ezen kifejezésekből kapjuk

$$E = D^2 (\nabla_2 v)^2, \quad F = -D^2 \nabla_2 u \nabla_2 v, \quad G = D^2 (\nabla_2 u)^2$$

és így $\dfrac{1}{D^2} = \{(\nabla_2 u)^2 (\nabla_2 v)^2 - (\nabla_2 u \nabla_2 v)^2\} = [\nabla_2 u \nabla_2 v]^2.$

Hasonlóképen kapjuk

$$L = -D^2 \nabla_2 v \nabla_3 v, \quad M = D^2 \nabla_2 u \nabla_3 v = D^2 \nabla_2 v \nabla_3 u,$$
$$N = -D^2 \nabla_2 u \nabla_3 u.$$

Az új paraméter-vonalak esetében a megfelelő alapmennyiségek

$$D_1{}^2 = \frac{1}{[\nabla_2 \varphi \nabla_2 \psi]^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$E_1 = \frac{(\nabla_2 \psi)^2}{[\nabla_2 \varphi \nabla_2 \psi]^2}, \quad F_1 = -\frac{\nabla_2 \varphi \nabla_2 \psi}{[\nabla_2 \varphi \nabla_2 \psi]^2}, \quad G_1 = \frac{(\nabla_2 \varphi)^2}{[\nabla_2 \varphi \nabla_2 \psi]^2} \quad \ldots \quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} L_1 = -\frac{\nabla_2 \psi \nabla_3 \psi}{[\nabla_2 \varphi \nabla_2 \psi]^2}, \quad M_1 = \frac{\nabla_2 \varphi \nabla_3 \psi}{[\nabla_2 \varphi \nabla_2 \psi]^2} = \frac{\nabla_3 \varphi \nabla_2 \psi}{[\nabla_2 \varphi \nabla_2 \psi]^2}, \\ N_1 = -\frac{\triangle_2 \varphi \triangle_3 \varphi}{[\nabla_2 \varphi \nabla_2 \psi]^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (5)$$

Ezek alapján az ívelem négyzetének alakja az új paraméter-vonalakban

$$ds^2 = \frac{(\nabla_2 \psi)^2 d\varphi^2 - 2 \nabla_2 \varphi \nabla_2 \psi \, d\varphi \, d\psi + (\nabla_2 \varphi)^2 d\psi^2}{[\nabla_2 \varphi \nabla_2 \psi]^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Hasonló módon kifejezhetjük a (4) és (5) alapján a normalis metszet görbületét

$$\frac{1}{R} = -\frac{\nabla_2 \psi \nabla_3 \psi \, d\varphi^2 - 2 \nabla_2 \varphi \nabla_3 \psi \, d\varphi \, d\psi + \nabla_2 \varphi \nabla_3 \varphi \, d\psi^2}{(\nabla_2 \psi)^2 d\varphi^2 - 2 \nabla_2 \varphi \nabla_2 \psi \, d\varphi \, d\psi + (\nabla_2 \varphi)^2 d\psi^2} \quad \ldots \quad (7)$$

A H és K kifejezéseit pedig egyszerüen kapjuk az előző pont (21) és (22) egyenleteiből:

$$\left.\begin{aligned} H &= -[\nabla_3 \bar{r}] = -\nabla_1 \bar{n} = -\bar{n} [\nabla_2 \bar{n}] \\ K &= \frac{1}{2} \bar{n} [\nabla_3 \bar{n}], \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

gyanonnan a normalis irányára kapjuk

$$\bar{n} = \frac{1}{2} [\nabla_2 \bar{r}] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

A $\varphi(u, v) = \text{const.}$ görbével megadott felületi irány normalis metszetének görbületi irányát a (7)-nél egyszerübb módon is kifejezhetjük. A 35. pont (8) alapján ugyanis

$$\frac{1}{R} = \frac{L\varphi_v'^2 - 2M\varphi_u'\varphi_v' + N\varphi_u'^2}{E\varphi_v'^2 - 2F\varphi_u'\varphi_v' + G\varphi_u'^2}.$$

Ezen érték pedig az előző pont (5) és (7) alapján

$$\frac{1}{R} = -\frac{\nabla_2\varphi\,\nabla_3\varphi}{(\nabla_2\varphi)^2} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (10)$$

alakban is előállítható.

Hasonlókép a geodeticus torsió a 35. pont (9) képlete szerint

$$\frac{1}{\rho_2'} = \frac{(FL - EM)\varphi_v'^2 - (GL - EN)\varphi_u'\varphi_v' + (GM - FN)\varphi_u'^2}{D(E\varphi_v'^2 - 2F\varphi_u'\varphi_v' + G\varphi_u'^2)}.$$

Ugyanez az előző pont (26) és (11) alapján

$$\frac{1}{\rho_2'} = \frac{\bar{n}[\nabla_2\varphi\,\nabla_3\varphi]}{\bar{n}[\nabla_1\varphi\,\nabla_2\varphi]} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (11)$$

vagy pedig

$$\frac{1}{\rho_2'} = \frac{\bar{n}[\nabla_2\varphi\,\nabla_3\varphi]}{(\nabla_1\varphi)^2} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (11_1)$$

Ha pedig a felületi vonalelem az egységnyi $\bar{\alpha}$ vectorral van jellemezve, akkor az előző pont (24) szerint a geodetikus torsió értéke:

$$\frac{1}{\rho_2'} = -\bar{\alpha}[\nabla_1\bar{\alpha}].$$

A (4) formulákból könnyű felírni annak feltételét, hogy a felület paraméter-vonalai egymást merőlegesen szeljék, ez esetben ugyanis $F_1 = 0$, tehát

$$\nabla_2\varphi\,\nabla_2\psi = 0.$$

Ugyanígy megállapíthatjuk annak feltételét, hogy mikor lesz az egyik paraméter-vonal asymptotikus vonal, vagy görbületi vonal. Az asymptotikus, illetőleg a görbületi vonal differentiál-egyenlete

$$d\bar{n}\,d\bar{r} = 0$$

és

$$[d\bar{n}\,d\bar{r}] = 0,$$

ebből annak feltétele, hogy az $u = \text{const}$, $(du = 0)$ vonal asymptotikus, illetőleg görbületi vonal

$$\bar{n}_v'\,\bar{r}_v' = 0$$

és

$$[\bar{n}_v'\,\bar{r}_v'] = 0,$$

vagy differentiál-paraméterrel kifejezve

$$\nabla_2 u.\ \nabla_3 u = 0$$

és

$$[\nabla_2 u,\ \nabla_3 u] = 0.$$

Ebből tehát következik, hogy a $\varphi(u, v) = \text{const.}$ vonal akkor asymptotikus vonal, ha

$$\nabla_2 \varphi \, \nabla_3 \varphi = 0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (12)$$

és akkor görbületi vonal, ha

$$[\nabla_2 \varphi \, \nabla_3 \varphi] = 0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (13)$$

Ez utóbbi eredményt a (11) formából is megkaphattuk volna, mert a görbületi vonalak geodetikus torsiója eltűnik.

A másodrendű ∇_4 differentiál-operator segítségével további kifejezéseket számíthatunk ki. Az u, v paraméter-vonalak esetében ugyanis

$$\nabla_4 u = \frac{\bar{r}''_{vv}}{D^2}, \qquad \nabla_4 v = \frac{\bar{r}''_{uu}}{D^2}. \quad \dots\dots\dots \quad (14)$$

Ezen értékek felhasználásával kapjuk

$$\begin{aligned} m &= D^3 \nabla_2 v \, \nabla_4 v, & m'' &= D^3 \nabla_2 v \, \nabla_4 u, \\ n &= -D^3 \nabla_2 u \, \nabla_4 v, & n'' &= -D^3 \nabla_2 u \, \nabla_4 u, \\ L &= D^2 \bar{n} \, \nabla_4 v, & N &= D^2 \bar{n} \, \nabla_4 u. \end{aligned}$$

Az új paraméter-vonalak esetében tehát

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= D_1^3 \nabla_2 \psi \, \nabla_4 \psi, & m_1'' &= D_1^3 \nabla_2 \psi \, \nabla_4 \varphi, \\ n_1 &= -D_1^3 \nabla_2 \varphi \, \nabla_4 \psi, & n_1'' &= -D_1^3 \nabla_2 \varphi \, \nabla_4 \varphi, \\ L_1 &= D_1^2 \bar{n} \, \nabla_4 \psi, & N_1 &= D_1^2 \bar{n} \, \nabla_4 \varphi, \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

ezen kifejezésekben

$$D_1^2 = \frac{1}{[\nabla_2 \varphi \, \nabla_2 \psi]^2}.$$

Ezek alapján megállapíthatjuk a $\varphi(u, v) = \text{const.}$ görbe geodetikus görbületét, továbbá annak feltételét, mikor jelent e görbe geodetikus görbét. Az $u = \text{const.}$ vonalnál a geodetikus görbület a 33. pont (16) képlete alapján

$$\frac{1}{g_1} = \frac{\bar{n}\,[\bar{r}'_v \, \bar{r}''_{vv}]}{(\bar{r}'^2_v)^{3/2}},$$

vagy az (1) és (14) szerint

$$\frac{1}{g_1} = \frac{\bar{n}\,[\nabla_2 u \, \nabla_4 u]}{|\nabla_2 u|^3}.$$

Analogia útján a $\varphi = \text{const.}$ vonal geodetikus görbülete

$$\frac{1}{g_1} = \frac{\bar{n}\,[\nabla_2 \varphi \, \nabla_4 \varphi]}{|\nabla_2 \varphi|^3}. \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (16)$$

Ha ezen értékbe helyettesítjük az előző pont (27) és (5) eredményeit, kapjuk a 35. pont (10) alatt már megkapott eredményt:

$$\frac{1}{g_1} = \frac{(p\,\varphi'^2_v - 2p'\,\varphi'_u\,\varphi'_v + p''\,\varphi'^2_u)\,\varphi'_v - (q\,\varphi'^2_v - 2q'\,\varphi'_u\,\varphi'_v + q''\,\varphi'^2_u)\,\varphi'_u}{(E\,\varphi'^2_v - 2F\,\varphi'_u\,\varphi'_v + G\,\varphi'^2_u)^{3/2}}\,D.$$

A (16)-ból egyszerre felírhatjuk annak feltételét, hogy a $\varphi = \text{const.}$ vonal geodetikus vonalat jelentsen. Ez esetben ugyanis $\frac{1}{g_1} = 0$ és így

$$\bar{n}\,[\nabla_2\varphi\;\nabla_4\varphi] = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

a kivánt feltétel.

49. Scalaris függvénynyel meghatározott felület.

Az $F(x,y,z) = 0$ felületet úgy tekinthetjük, mint az

$$F(x,y,z) = \text{const} \;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

scalaris tér, vagy felületsereg egy felületét. Ezen felületseregre merőleges vectort a

$$\operatorname{grad} F = F'_x\,\bar{\varepsilon}_1 + F'_y\,\bar{\varepsilon}_2 + F'_z\,\bar{\varepsilon}_3$$

adja. A felület normalisa tehát

$$\bar{n} = \frac{\operatorname{grad} F}{|\operatorname{grad} F|} = \frac{F'_x\,\bar{\varepsilon}_1 + F'_y\,\bar{\varepsilon}_2 + F'^2\,\bar{\varepsilon}_3}{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}}, \;\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

honnan a normalis iránycosinusai

$$\xi = \frac{F'_x}{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}},\quad \eta = \frac{F'_y}{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}},\quad \xi = \frac{F'_z}{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}}.$$

Ha a görbe P pontjához tartozó érintősík általános pontja Q, akkor az érintősík egyenlete

$$(Q - P)\operatorname{grad} F = 0. \;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Az $F(x,y,z) = 0$ felület egy görbéjét úgy határozhatjuk meg, ha megadjuk ezen felületnek a $G(x,y,z) = 0$ felülettel való metszését. Ez esetben együtt áll fenn az

$$\left.\begin{aligned} &F'_x\,dx + F'_y\,dy + F'_z\,dz = 0 \\ \text{és}\quad &G'_x\,dx + G'_y\,dy + G'_z\,dz = 0 \end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

egyenlőség. A görbe vonaleleme

$$d\bar{r} = dx\,\bar{\varepsilon}_1 + dy\,\bar{\varepsilon}_2 + dz\,\bar{\varepsilon}_3,$$

hol dx, dy, dz a (4) egyenletnek tesz eleget. A görbe érintőjének irányát legkönnyebben úgy kapjuk meg, ha a két metszőfelület normalisát vectorképen összeszorozzuk, mert a felületi görbe mindkettőre merőleges. Így kapjuk a görbénél

$$\bar{\tau} = \frac{[\operatorname{grad} F, \operatorname{grad} G]}{|[\operatorname{grad} F, \operatorname{grad} G]|}. \;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

A görbe P pontjához tartozó érintő egyenletét a

$$\left.\begin{aligned} (Q - P)\operatorname{grad} F &= 0, \\ (Q - P)\operatorname{grad} G &= 0 \end{aligned}\right. \;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

egyenlet adja, ha Q a görbe érintőjének egy pontja, mert a

$Q - P$ vector merőleges mindkét felület normalisára. A normalis sík egyenletét pedig

$$(Q - P)\,[\operatorname{grad} F, \operatorname{grad} G] = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

adja.

Ha a felület egyenletét $z = f(x, y)$ alakban adjuk, akkor ebből könnyű felírni vector-egyenletét

$$\bar{r} = x\,\bar{\mathfrak{e}}_1 + y\,\bar{\mathfrak{e}}_2 + f(x, y)\,\bar{\mathfrak{e}}_3.$$

Ez esetben az eddigi u helyett mindenütt x-et, a v helyett y-t teszünk és a következő jelöléseket vezetjük be:

$$\begin{aligned} &f'_x = \mathfrak{p}, \; f'_y = \mathfrak{q}, \\ &f''_{xx} = \mathfrak{r}, \; f''_{xy} = \mathfrak{s}, \; f''_{yy} = \mathfrak{t}. \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Ezen jelölésekkel kapjuk:

$$\begin{aligned} &\bar{r}'_x = \bar{\mathfrak{e}}_1 + \mathfrak{p}\,\bar{\mathfrak{e}}_3, \\ &\bar{r}'_y = \bar{\mathfrak{e}}_2 + \mathfrak{q}\,\bar{\mathfrak{e}}_3, \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

$$\bar{r}''_{xx} = \mathfrak{r}\,\bar{\mathfrak{e}}_3, \; r''_{xy} = \mathfrak{s}\,\bar{\mathfrak{e}}_3, \; \bar{r}''_{yy} = \mathfrak{t}\,\bar{\mathfrak{e}}_3. \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

A (9)-ből kapjuk a felület elsőrendű alapmennyiségeit:*

$$\begin{aligned} &E = 1 + \mathfrak{p}^2, \; F = \mathfrak{p}\,\mathfrak{q}, \; G = 1 + \mathfrak{q}^2, \\ &D^2 = 1 + \mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2. \end{aligned} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

A felület normalisa ugyancsak a (9)-ből

$$\bar{n} = \frac{[\bar{r}'_x \bar{r}_y]}{D} = \frac{-\mathfrak{p}\,\bar{\mathfrak{e}}_1 - \mathfrak{q}\,\bar{\mathfrak{e}}_2 + \bar{\mathfrak{e}}_3}{\sqrt{1 + \mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2}}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

A (10) és (12)-ből kapjuk a másodrendű alapmennyiségeket:

$$L = \frac{\mathfrak{r}}{D}, \; M = \frac{\mathfrak{s}}{D}, \; N = \frac{\mathfrak{t}}{D}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

A további mennyiségek a következők:

$$\begin{aligned} &m = \mathfrak{p}\,\mathfrak{r}, \; m' = \mathfrak{p}\,\mathfrak{s}, \; m'' = \mathfrak{p}\,\mathfrak{t}, \\ &n = \mathfrak{q}\,\mathfrak{r}, \; n' = \mathfrak{q}\,\mathfrak{s}, \; n'' = \mathfrak{q}\,\mathfrak{t}, \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

$$\left.\begin{aligned} &p = \frac{\mathfrak{q}\,\mathfrak{r}}{D^2}, \quad q = -\frac{\mathfrak{p}\,\mathfrak{r}}{D^2}, \\ &p' = \frac{\mathfrak{q}\,\mathfrak{s}}{D^2}, \quad q' = -\frac{\mathfrak{p}\,\mathfrak{s}}{D^2}, \\ &p'' = \frac{\mathfrak{q}\,\mathfrak{t}}{D^2}, \quad q'' = -\frac{\mathfrak{p}\,\mathfrak{t}}{D^2}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

És végül a görbületi mérték és a középgörbület kifejezése

$$H = \frac{(1 + \mathfrak{p}^2)\,\mathfrak{t} - 2\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{s} + (1 + \mathfrak{q}^2)\,\mathfrak{r}}{(1 + \mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2)^{3/2}} \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

$$K = \frac{\mathfrak{r}\,\mathfrak{t} - \mathfrak{s}^2}{(1 + \mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2)^2}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

---

* Auerbach F.-Rothe R.: Taschenbuch für Mathematiker und Physiker. III. Jahrgang. 1913. Teubner. p. 171.

Tartalmi áttekintés.

III. FEJEZET.

Felületek elmélete.

Sárközy Pál.