VERSENYFELADATOK AZ EÖTVÖS-INGA BŰVÖLETÉBEN – 2. rész

Radnai Gyula
ELTE, Anyagtudományi Tanszék
Cserti József
ELTE, Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

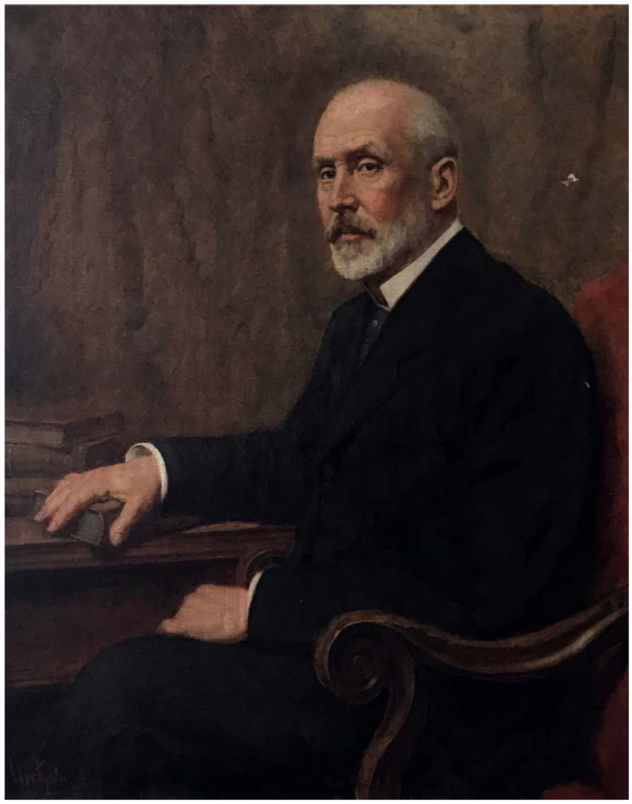
Eötvös Lorándra emlékezve

„Közöttünk már csak emléke él tovább, nem mint szellemóriásé, akit csak bámulni tudnánk, hanem mint úttörő munkásé, akit követhetünk" – szólt a tudósok nevében *Eötvös Loránd* a csaknem száz évet élt *Jedlik Ányosra* emlékezve az Akadémián [18].

Eötvös Loránd (*15. ábra*) halálának centenáriumán *Lovász László,* az Akadémia akkori elnöke így emlékezett Eötvösre: „Nevét viseli a folyadékok felületi feszültségének hőmérsékletfüggését leíró Eötvös-törvény, a Föld tengely körüli forgása következtében a keleti és nyugati irányban mozgó testek súlykülönbségét megmagyarázó Eötvös-hatás. Mindezek alapja és betetőzése, hogy kísérleti fizikusként megalkotta a súlyos és a tehetetlen tömeg arányosságának kimutatására alkalmas Eötvös-féle torziós ingát. … Eötvös elismertségét és a magyar tudományosság külföldi elfogadottságát is mutatta, hogy a Párizsi Világkiállításon bemutatták a torziós ingát, amely nagydíjat nyert." [19].

Az immár 70 éve Eötvös nevét viselő egyetem rektora, *Borhy László* pedig így nyilatkozott: „Eötvös Loránd igazán sokoldalú tehetség volt, olyan ember, aki saját ügyével mindig igyekezett másokat is szolgálni. Egyszerre volt a tanítás iránt elkötelezett tudós, kutató és oktató, aki miniszterként népe felemelésén, míg a Magyar Tudományos Akadémia elnökeként a tudomány és műveltség megbecsültségéért munkálkodott." [19].

Az UNESCO-val együttműködésben a világ tudományos közössége 2019-ben emlékezett meg Eötvös halálának 100. évfordulójáról. E centenáriumi évben, a tudományos rendezvények és kiállítások sorozatának részeként a *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok,* valamint az Ortvay-verseny feladataiban is felidéztük Eötvös emlékét. A cél az volt, hogy néhány olyan problémát tűzzünk ki, amelyek a tudós máig is aktuális, mind elméleti, mind alkalmazás szempontjából nemzetközileg is meghatározó munkásságához kapcsolódnak.



15. ábra. Eötvös Loránd. Éder Gyula (1875–1945) 1941-ben készült festménye az ELTE Elmélet Fizikai Tanszékén látható. A kép alapja Székely Aladár (1870–1940) fotóművész 1912-ben készült portréja.

Idézzük fel először a *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok* (*KöMaL*) azután a tavaly éppen ötven éves jubileumát is ünneplő Ortvay-verseny ide illő feladatait!

Fizikai versenyfeladatok a *KöMaL*-ban

Bármilyen hihetetlen, de Eötvös Loránd kultuszminisztersége idején, 1895 januárjában csupán fizikafeladatokat tűzött ki *Arany Dániel* az előző évben meg-

Köszönjük *Dávid Gyulának* a jubileumi Ortvay-verseny 2. feladat megoldásával kapcsolatos észrevételeit és az Ortvay-versenyről írt gondolatait.

Radnai Gyula ny. egyetemi docens, kandidátus, matematika-fizika tanári szakon végzett 1962-ben. Az ELTE Kísérleti Fizika tanszékén kapcsolódott be a tanárképzésbe. A hazai fizika kultúrtörténetének kutatója a '70-es évektől, amelyet a *Physics in Budapest* című könyv, a *Fizikai Szemlében* és a *Természet Világában* megjelent számos publikációja fémjelez. 1973-tól volt az Eötvös-versenybizottság tagja, *Vermes Miklóst* követően, 1988-tól 2013-ig vezetője. 1989-től vezeti a *KöMaL* fizikai szerkesztőbizottságát.

Cserti József 1982-ben végezett az ELTE fizikus szakán, majd az ELTE korábbi Szilárdtestfizika Tanszékén kezdte oktatói munkáját. 2004-ben habilitált, 2010 óta az MTA doktora, 2013-tól az ELTE Komplex Rendszerek Fizikája tanszéken professzor. Kutatási területe a nanofizikai rendszerek, normál-szupravezető rendszerek, spintronika, grafén és a topologikus szigetelők. 2005 óta szervezi az ELTE-n az Atomoktól a csillagokig előadás-sorozatot középiskolásoknak.

indított *Középiskolai Mathematikai Lapokban*. Azután 1896-ban átadta a szerkesztést *Rátz Lászlónak,* s a fizika fokozatosan háttérbe szorult. Csak 1925-ben, amikor *Faragó Andor* vette kézbe az újság kiadását és szerkesztését, került vissza a fizika a most már új néven megindított *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapokba*.

A háborús években, nemcsak az első, de a második világháború idején se jelent meg az újság. 1945 után 1947-ben Szegeden indult újra útjára, a matematikus *Surányi János* aktív közreműködésével. *Kunfalvi Rezsőnek* köszönhető, hogy 1959 őszétől már „Fizika rovattal bővítve” jelent meg, és megindult benne a fizikai versenyfeladatokkal folyó pontverseny is. A havonta megjelenő folyóiratban kitűzött feladatok megoldásán ma is egy hónapig törhetik fejüket a diákok – jó felkészülés ez az országos versenyekre és az egyetemi felvételikre. Az Eötvös-verseny nyertesei például rendszeresen a *KöMaL* versenyfeladatainak sikeres megoldói közül kerülnek ki.

A *Középiskolai Matematikai Lapokat* az 1980-as években kezdték *KöMaL*-nak hívni, ez maradt a rövidítése az után is, hogy 1992-től ismét *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok* lett a neve és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat kiadásában két társulat közös lapjaként, a Minisztérium és további alapítványok pályázatai, cégek szponzorálása segítségével jelent meg 2006-ig. 2007 óta a *KöMaL* anyagi támogatása érdekében létrejött közhasznú MATFUND Középiskolai Matematikai és Fizikai Alapítvány a lap kiadója [20].

A *KöMaL* versenyfeladatai az illetékes szerkesztőbizottság tagjainak közös döntése alapján kerülnek kitűzésre. A 2019-es Eötvös-centenáriumhoz kapcsolódóan két torziós ingás feladat is kiválasztásra került. Az egyik a 2019/2020-as tanév elején, novemberben, a másik, amelynek megoldásához már ötletet adhatott az előző feladat megoldásának megjelenése, a tanév végén, májusban jelent meg.

Lássuk ezt a két feladatot. Az elsőben ugyanúgy a torziós ingára távolból ható test gravitációs erőhatását kell vizsgálni, mint az 1998-as Eötvös-verseny feladatában, de most azt kell kideríteni, hogy miként áll a torziós inga rúdja, amikor a legnagyobb forgatónyomaték hat rá. A második is hasonlít az említett Eötvös-verseny feladatára, de most nem egy távoli, hanem két közeli test hatására módosulnak a lengésidők, amelyek itt nem adottak, hanem – két speciális esetben – éppen ezeket kell meghatározni.

Álló ingás *KöMaL*-feladat

(2019. november)

Egy Eötvös-inga $2r$ = 40 cm-es rúdjának végeire egy-egy m = 30 g tömegű, kicsiny testet erősítünk. A rendkívül könnyű rúd egy hajszálvékony fémszálon függ, vízszintes helyzetben. Közepétől mérve R = 3 m távolságban, vele azonos magasságban egy m^* = 100 kg tömegű ólomgolyót helyeztek el.

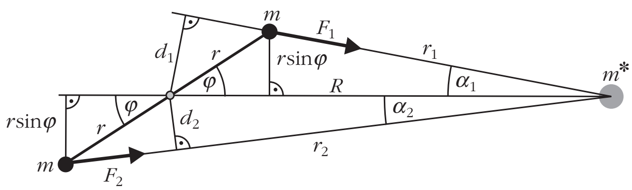
a) Mekkora forgatónyomatékot gyakorol az ólomgolyó az ingára, amikor a golyót és az ingarúd közepét összekötő egyenes φ szöget zár be a rúd irányával?

b) Ábrázoljuk a forgatónyomatékot φ függvényében! Mekkora szögnél lesz maximális a forgatónyomaték?

(*Cserti József*)

Megoldás

A hivatalos megoldás a *KöMaL*-ban jelent meg [21]. Tekintsük *16. ábrán* látható helyzetet, és alkalmaz-



16. ábra. A rúd két végén lévő m tömegű testre ható erők.

zuk az ábra jelöléseit! Az m tömegű, kicsiny testek és az m^* tömegű ólomgolyó között ható erők nagysága:

$$F_1 = \frac{\gamma\, m\, m^*}{r_1^2} = \frac{\gamma\, m\, m^*}{R^2 - 2\, r R \cos\varphi + r^2},$$

illetve

$$F_2 = \frac{\gamma\, m\, m^*}{r_2^2} = \frac{\gamma\, m\, m^*}{R^2 + 2\, r R \cos\varphi + r^2}.$$

Ezek az erők (a rúd középpontjára vonatkoztatott) forgatónyomatékot fejtenek ki a rúdra:

$$\begin{aligned} M(\varphi) &= -F_1\, d_1 + F_2\, d_2 = \\ &= \gamma\, m\, m^*\, r R \sin\varphi \left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) = \\ &= \gamma\, m\, m^*\, r R \sin\varphi \Big[\left(R^2 + 2\, r R \cos\varphi + r^2\right)^{-\frac{3}{2}} - \\ &\qquad - \left(R^2 - 2\, r R \cos\varphi + r^2\right)^{-\frac{3}{2}}\Big], \end{aligned}$$

ahol

$$d_1 = R \sin\alpha_1 = \frac{R\, r}{r_1} \sin\varphi \quad \text{és} \quad d_2 = R \sin\alpha_2 = \frac{R\, r}{r_2} \sin\varphi$$

az ábra alapján számolt erőkarok. A forgatónyomaték vektora az ábra síkjára merőleges és abból kifelé mutat.

Ez a kifejezés, mivel $r_1 \neq r_2$, általában nem nulla, de ha $\varphi \approx 0$ vagy $\varphi \approx 90°$, akkor a forgatónyomaték nagyon kicsi, határesetben nulla lesz. Az első esetben d_1 és d_2 válik kicsivé, emiatt tűnik el a forgatónyomaték, a második esetben pedig $r_1 \approx r_2$, és így $F_1 \approx F_2$, ekkor a két kis testre ható, csaknem azonos nagyságú, de ellentétes irányú forgatónyomaték kiegyensúlyozza egymást.

Az $M(\varphi)$ függvény a megadott számértékek behelyettesítése után (például a Wolfram Alpha használatával [22]) ábrázolható, és maximumhelye is megtalálható. Van azonban egy másik út is. Vegyük észre, hogy r egy nagyságrenddel kisebb, mint R, hiszen

$$\frac{r}{R} \equiv \varepsilon = \frac{20\ \mathrm{cm}}{3\ \mathrm{m}} = 0{,}067 \ll 1,$$

emiatt nem tévedhetünk sokat, ha ε magasabb hatványait elhanyagoljuk ε legkisebb kitevőjű (de nem nulla együtthatójú) tagja mellett. Az előző feladatban használt, jól ismert $(1+\varepsilon)^n \approx 1+n\varepsilon$ közelítő formulát alkalmazva az eredő forgatónyomatékra kapjuk:

$$M(\varphi) = -\gamma\, m\, m^* \frac{6\,r^2}{R^3} \sin\varphi \cos\varphi =$$

$$= -\gamma\, m\, m^* \frac{3\,r^2}{R^3} \sin(2\varphi).$$

A negatív előjel azt fejezi ki, hogy a forgatónyomaték a kitéréssel ellentétes irányú. A $\varphi = 0$ és a $\varphi = 180°$-os helyzet stabil, míg $\varphi = 90°$-os helyzet labilis egyensúlynak felel meg.

A forgatónyomaték abszolút értéke $\varphi = \pm 45°$-nál a legnagyobb, és értéke

$$|M|_{\max} = \gamma\, m\, m^* \frac{3\,r^2}{R^3} = 9 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{N\,m}.$$

Ha a legnagyobb forgatónyomatékot numerikusan, a fenti közelítés alkalmazása nélkül határozzuk meg, a maximum helyére 44,9°-ot kapunk, és $M(\varphi)$ grafikusan ábrázolt képe gyakorlatilag megegyezik a $\sin(2\varphi)$ állandószorosának képével.

Megjegyzések

1. A feladat motivációját a *Dicke* által vezetett kísérleti csoport nevezetes cikkükben [23] olvasható állítás adta, miszerint az Eötvös-inga mellett ülő ember inga rúdjának végén lévő kis tömegekre ható forgatónyomatéka, a fenti megoldással összhangban, 45°-nál a legnagyobb. A cikkben megmutatták azt is – ami első hangzásra meglepőnek tűnik –, hogy például egy 100 kg tömegű embernek legalább 30 m távolságban kell lennie az ingától, hogy az általa kifejtett forgatónyomaték hatása kisebb legyen Eötvös ekvivalenciaelvvel kapcsolatos méréseinek pontosságánál, azaz a súlyos és tehetetlen tömeg arányának 1-től való 10^{-11}-nyi eltérésénél.

2. Ha az Eötvös által használt torziós inga direkciós nyomatékára (egységnyi szögkitéréshez tartozó visszatérítő forgatónyomatékra) nagyságrendileg $D_0 = 5 \cdot 10^{-8}$ Nm értéket veszünk, akkor a 30 méter távolságra lévő 100 kg-os ember által az ingára kifejtett gravitációs forgatónyomaték hatására az inga rúdja 3,7 szögmásodpercet fordulna el.

Lengő ingás *KöMaL*-feladat

(2020. május)

Egy vékony, elhanyagolható tömegű, 21 cm hosszú, merev rúd végein egy-egy azonos tömegű, pontszerűnek tekinthető, kicsiny test van. Ezt a rudat a közepénél fogva felfüggesztjük egy olyan vékony, rugalmas szálra, hogy az így kapott torziós inga kis kitérések esetén mérhető lengésideje viszonylag nagy, 600 másodperc legyen. Ezután az ingát belógatjuk két, egyenként 600 kg tömegű, nagy ólomgolyó közé, középre. Az ólomgolyók középpontjai egymástól 70 cm-re vannak. Mennyi lesz az inga lengésideje kis kitérések esetén, ha az ingarúd kezdetben a) a két golyó középpontját összekötő vízszintes szakaszon van; b) az előbbi esetre merőleges helyzetű?

Megjegyzés: hasonló módon határozta meg Eötvös Loránd a gravitációs állandót két, mintegy 600 kg tömegű ólomhasáb és egy hasonlóan nagy lengésidejű torziós inga segítségével. A feladatban a gravitációs állandó ismert értékének felhasználásával kell a kétféle lengésidőt kiszámítani. (Lásd még a P. 5166. feladat megoldását a *KöMaL* 2020. évi márciusi számában [21].)

(*Radnai Gyula*)

Megoldás

A hivatalos megoldás a *KöMaL*-ban jelent meg [24].

Jelöljük a rúd hosszát $2r$-rel, az ólomgolyók középpontjainak távolságát $2R$-rel, az ólomgolyók tömegét m^*-gal, a rúd végén lévő egy-egy kicsiny test tömegét m-mel, a torziós szál direkciós nyomatékát (egységnyi szögkitéréshez tartozó visszatérítő forgatónyomatékot) pedig D_0-val. Az inga lengésideje eredetileg T_0. A feladat adatai szerint: $r = 0{,}105$ m, $R = 0{,}35$ m, $m^* = 600$ kg, $T_0 = 600$ s. (Az m tömeg nagyságát nem ismerjük, de mint látni fogjuk, arra nem is lesz szükségünk, mert kiesik a képletekből.)

A torziós inga lengésideje

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{D_0}} = 2\pi \sqrt{\frac{2\,m\,r^2}{D_0}}\,,$$

ahol $\Theta = 2\,m\,r^2$ a rúd végén lévő m tömegű testek tehetetlenségi nyomatéka. Ha valamilyen ok, például a gravitációs vonzóerők hatása miatt a direkciós nyomaték megváltozik, akkor ennek megfelelően a lengésidő is más lesz. Feladatunk tehát a gravitációs erők $M(\varphi)$ forgatónyomatékának meghatározása az egyensúlyi helyzettől mért (nagyon kicsiny) φ szögkitérésnél. Amennyiben

$$M_{\mathrm{grav}}(\varphi) \approx -D_{\mathrm{grav}} \cdot \varphi,$$

vagyis a gravitáció hatása úgy jelentkezik, mintha egy D_{grav} direkciós nyomatékú „torziós szál” segítené (vagy rontaná) a rugalmas szál visszahúzó hatását, ekkor a lengésidő

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2\,m\,r^2}{D_0 + D_{\rm grav}}}$$

értékre változna.

Legyen kezdetben az ingarúd az ólomgolyók középpontjait összekötő vízszintes egyenesen, majd térítsük ki egy kicsiny φ szöggel. A rúdra ható eredő forgatónyomaték (lásd az előző két feladat, illetve a P. 5166. feladat megoldását [21]):

$$M(\varphi) = $$

$$-2\gamma\, m\, m^*\, r R \sin\varphi \left[\left(R^2 + 2\, r R \cos\varphi + r^2\right)^{-\frac{3}{2}} - \right. \tag{3}$$

$$\left. - \left(R^2 - 2\, r R \cos\varphi + r^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right].$$

A képlet eleji kettes faktor a két ólomgolyót veszi figyelembe. A negatív előjel azt fejezi ki, hogy a forgatónyomaték visszatérítő, vagyis a kitérés szögével ellentétes előjelű. A továbbiakban kiszámoljuk a $D_{\rm grav}$ direkciós nyomatékot, ha az ingarúd kezdetben a) a két golyó középpontját összekötő vízszintes szakaszon van, b) az előbbi esetre merőleges helyzetű.

a) Kis szögeknél $\sin\varphi \approx \varphi$ és $\cos\varphi \approx 1$, ezért a forgatónyomaték közelítő alakja így írható:

$$M(\varphi) \approx -D_{\rm grav}^{(a)} \cdot \varphi,$$

ahol

$$D_{\rm grav}^{(a)} = 2\gamma\, m\, m^*\, r R \left[\frac{1}{(R-r)^3} - \frac{1}{(R+r)^3}\right] > 0.$$

b) A merőleges helyzethez közeli helyzetekben a forgatónyomatékot úgy kaphatjuk meg a (3) általános összefüggésből, hogy φ-t $\pi/2+x$ alakban írjuk fel, ahol x az inga merőleges egyensúlyi helyzetéből való kitérési szöge, $x \ll 1$. Ekkor $\sin x \approx x$ és $\cos x \approx 1$, és így írhatjuk:

$$M(x) = 2\gamma\, m\, m^*\, r R \left[\left(R^2 + r^2 - 2\, R\, r\, x\right)^{-\frac{3}{2}} - \right.$$

$$\left. - \left(R^2 + r^2 + 2\, R\, r\, x\right)^{-\frac{3}{2}}\right].$$

A fenti kifejezés szögletes zárójele két tagjából kiemelve R^2+r^2-t, és ismét felhasználva az $(1+x)^n \approx 1+nx$ közelítő formulát, kapjuk

$$M(x) \approx -D_{\rm grav}^{(b)} \cdot x,$$

ahol

$$D_{\rm grav}^{(b)} = -12\gamma\, m\, m^* \frac{R^2\, r^2}{(R^2+r^2)^{5/2}} < 0.$$

Mivel $D_{\rm grav}^{(b)} < 0$, a gravitációs erők a kitéréssel megegyező irányban akarják forgatni a torziós ingát, a rúd merőleges állású helyzete tehát a rugalmas szál nélkül instabil lenne.

Ezután felhasználva T_0 alakját, és a $D_{\rm grav}^{(a)}$, valamint a $D_{\rm grav}^{(b)}$ direkciós nyomatékokat beírva a lengési idő fenti képletébe a két esetnek megfelelő torziós lengés periódusideje:

$$T^{(a)} = 580\ \text{s} \quad \text{és} \quad T^{(b)} = 613\ \text{s}.$$

Látható, hogy m nagyságára valóban nem volt szükségünk.

Megjegyzések

1. Mint már a feladat kitűzésében is szerepelt, hasonló módon határozta meg Eötvös Loránd a gravitációs állandót, két, mintegy 600 kg tömegű ólomhasáb és egy hasonlóan nagy lengésidejű torziós inga segítségével. Tervezte a mérés még pontosabbá tételét is, amikor a kísérletet „a megbízhatatlan ólomhasábok helyett valóban homogén higannyal” és légüres térben végezné el, erre azonban már nem került sor.

2. A $D_{\rm grav}$ direkciós nyomatékot úgy is megkaphatjuk, mint az $M(\varphi)$ függvény deriváltjának (−1)-szerese, mégpedig az a) esetben $\varphi = 0$, a b) esetben pedig $\varphi = \pi/2$ szögnél.

Egyetemi versenyfeladatok az Ortvay-versenyen

Az ELTE TTK Fizikus Diákköre, az Eötvös Loránd Fizikai Társulat és a Magyar Fizikus Hallgatók Egyesülete által minden évben meghirdetett Ortvay Rudolf fizikai feladatmegoldó verseny 2020-ban ünnepli félszáz éves jubileumát: tavaly ősszel zajlott le az ötvenedik verseny.

A kezdetben „A Fizikus Diákkör problémamegoldó versenye” néven futó rendezvényt 1970-ben indította útjára az ELTE TTK két fiatal oktatója, *Major János* és *Tichy Géza*.

Az Ortvay-versenyen minden – hazai és külföldi – egyetemi hallgató indulhat. A doktoranduszok külön kategóriát alkotnak. A feladatok megoldására 10 nap áll rendelkezésre. Egy versenyző maximálisan 10 feladat megoldását adhatja be. Minden feladat megoldása maximálisan 100 pontot ér. A feladatok megoldásához bármilyen segédeszköz használható. Könyvre, folyóiratcikkre hivatkozni lehet.

Az Ortvay-versenyen kitűzött feladatok nem az iskolás jellegű feladatmegoldó rutint, hanem a fizikai gondolkodás, problémafelismerés, a megfelelő matematikai eszközök megválasztásának képességeit mozgósítják. A feladatok önálló szellemi termékek, kitűzőik különböző egyetemeken és kutatóintézetekben dolgozó fizikusok, jelentős részük maga is hajdani versenyző. Az utóbbi időben örvendetes módon egyre több egyetemi hallgató is rászánta magát, hogy tömör és frappáns feladatot fogalmazzon társainak, emellett vállalja a beérkezett megoldások elbírálásának felelősségét is.

A megoldások értékelése évfolyamonként történik, így már az alsóbb éves hallgatók is komoly sikerélményhez és értékes díjakhoz juthatnak. Egyre gyakrabban fordul elő, hogy 11–12. évfolyamos középiskolások is részt vesznek az elsőévesek versenyében, többször igen jó helyezést elérve.

Az Ortvay-verseny 1998 óta nemzetközi, a feladatokat angol nyelven is kitűzzük. Ma már a világ számos országából érkeznek megoldások, az utóbbi években a résztvevők mintegy fele külföldi.

A verseny lebonyolítása egy ideje teljesen elektronikusan történik. Az eddigi ötven év összes feladata elérhető a verseny https://ortvay.elte.hu weblapján, az utóbbi 22 év feladatai angolul is.

Egyes feladatok megoldatlan, nyitott tudományos kérdésekhez vezetik el a versenyzőket, az ilyen problémákban való elmélyedés későbbi tudományos témaválasztásukra is ösztönzően hathat. Az eredményhirdetést követő részletes diszkussziók során egyes nehezebb feladatok tanulságos, olykor tudományos igényű vitákat indukálnak.

A verseny az évek folyamán komoly rangot vívott ki, szakdolgozati témák, doktori és külföldi ösztöndíjak odaítélésekor fontos szempont az Ortvay-versenyen elért helyezés vagy dicséret. Az Ortvay-verseny hajdani résztvevői és díjazottai között ma már számos nemzetközi rangú kutatót találunk.

A több évtizede futó Ortvay-verseny mintájára és részben annak feladatait felhasználva az ELTE Fizikai Intézete 2016 óta rendszeresen meghirdeti fizikatanár szakos hallgatók számára a Károlyházy Frigyes problémamegoldó versenyt. Ennek célja a hallgatók felkészítése a tanári szerepre, tudományos látókörük bővítése és tapasztalatok szerzése majdani munkájukhoz.

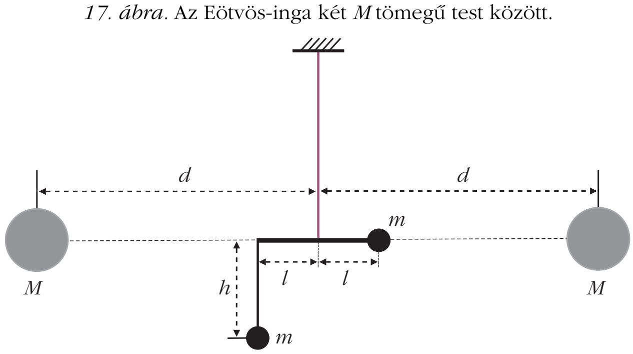
A jubileumi, 50. Ortvay-verseny 1. feladata

(2019. október 25. – november 4.)

A *17. ábrán* látható két M tömegű, egymástól $2d$ távolságra lévő test között középen elhelyezett Eötvös-inga az egyensúlyi helyzete körül kis amplitúdójú torziós rezgéseket végez. Az Eötvös-ingában a vízszintes, $2l$ hosszúságú rúd két végéhez egy-egy m tömegű test van rögzítve, amelyek közül az egyik test h hosszúságú fonalon lóg. A rúd középen a két M tömegű testet összekötő egyenesre merőleges irányba mutató vékony, D_0 direkciós nyomatékú (csavarási nyomatékú) torziós szálhoz van erősítve (az eredeti kitűzésben D). Határozzuk meg az inga torziós rezgésének (az m tömegek torziós szálirányú tengely körüli elfordulásának) periódusidejét! Függ-e a periódusidő h-tól? Tegyük fel, hogy $l,\ h \ll d$ és $m \ll M$! [25]

(Cserti József)

17. ábra. Az Eötvös-inga két M tömegű test között.



Megoldás

Az eddig bemutatott számolásokban közvetlenül a forgatónyomatékot határoztuk meg, figyelembe véve a testre ható erők nagyságát és irányát. Ezért a levezetés során gondosan számításba kellett venni az elrendezés geometriáját. A következőkben egy olyan módszert mutatunk be, amelyben nem a testre ható erőkkel, hanem a testek gravitációs potenciális energiáinak összegéből határozzuk meg az ingára ható forgatónyomatékot (a forgatónyomaték-vektor szálirányú komponensének előjeles nagyságát).

Az m tömegű, pontszerű testre a $V(\boldsymbol{r})$ gravitációs potenciálban ható

$$\boldsymbol{F} = -m\,\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{r})}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}$$

erő által kifejtett forgatónyomaték

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F},$$

ahol $\boldsymbol{r}$ egy rögzített középponttól az erő támadáspontjába mutató vektor. Tegyük fel, hogy a pontszerű test $\mathrm{d}\varphi$ infinitezimális szöget fordul el a rögzített ponton átmenő és az $\boldsymbol{n}$ egységvektor irányában mutató tengely körül! Ez lehet például az inga fonalának iránya. Ekkor a test elmozdulása

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\varphi.$$

Legyen a forgatónyomaték $\boldsymbol{n}$ egységvektor irányú komponense M_n nagyságú! A fentiek szerint

$$M_n = \boldsymbol{n}\,(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{F}\,(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{F}\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\varphi}.$$

Felhasználva az erő potenciállal kifejezett alakját és a deriválásra érvényes láncszabályt, az alábbi összefüggést kapjuk a forgatónyomaték-vektor $\boldsymbol{n}$ irányú komponensére:

$$M_n(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{n}\,\boldsymbol{M} = -m\,\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{r})}{\mathrm{d}\varphi}. \tag{4}$$

A továbbiakban ezt az általános képletet használjuk a forgatónyomaték kiszámítására. Itt jegyezzük meg, hogy az előző feladatokban ugyanazt az eredményt kapnánk, ha a megfelelő potenciál deriváltjából számolnánk a forgatónyomatékot.

Legyen a Descartes-féle koordináta-rendszer középpontja az a pont, ahol az inga rúdja annak fonalához van rögzítve. A koordináta-rendszer z tengelye az inga fonalának irányában függőlegesen felfelé, az x tengelye a két M tömegű testet összekötő egyenes mentén „jobbra” mutat, míg az y tengely ezekre merőleges, jobbsodrású rendszert alkotva!

Ekkor az ábra szerint a jobb és bal oldali M tömegű testek helyvektorai:

$$\boldsymbol{R}_1 = (d, 0, 0) \text{ és } \boldsymbol{R}_2 = (-d, 0, 0).$$

Ha az inga rúdja az x-y síkban φ szöget zár be az x tengellyel, akkor az inga rúdján lévő jobb és bal oldali m tömegű testek helyvektorai:

$$\boldsymbol{r}_1 = (l\cos\varphi,\ l\sin\varphi,\ 0)$$

és

$$\boldsymbol{r}_2 = (-l\cos\varphi,\ -l\sin\varphi,\ -h).$$

Az egyik m tömegű kis test által a másik m tömeg helyén létrehozott gravitációs potenciált a számolás során figyelmen kívül hagyhatjuk, hiszen a kis testek távolságának állandó volta miatt ez a potenciálérték nem változik az inga elfordulásakor. Ekkor az $\boldsymbol{R}_1$ és $\boldsymbol{R}_2$ pontban lévő M tömegek által létrehozott gravitációs potenciál az $\boldsymbol{r}_1$ és az $\boldsymbol{r}_2$ pontokban:

$$V_1(\boldsymbol{r}_1) = -\gamma\left[\frac{M}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{R}_1|} + \frac{M}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{R}_2|}\right]$$

és (5)

$$V_2(\boldsymbol{r}_2) = -\gamma\left[\frac{M}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{R}_1|} + \frac{M}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{R}_2|}\right].$$

Az $\boldsymbol{n}$ egységvektort z irányban véve, a rúdra ható forgatónyomaték a két m tömegű test potenciális energiájának φ szerinti deriváltjából számítható ki. Algebrai átalakítások után kapjuk:

$$\begin{aligned} M_z &= -m\frac{\partial(V_1+V_2)}{\partial\varphi} = \\ &= -\gamma\, m M d\, l \sin\varphi\Bigg[\frac{1}{\left(d^2+l^2-2\,d\,l\cos\varphi\right)^{\frac{3}{2}}} - \\ &\quad - \frac{1}{\left(d^2+l^2+2\,d\,l\cos\varphi\right)^{\frac{3}{2}}} - \\ &\quad - \frac{1}{\left(d^2+l^2+h^2+2\,d\,l\cos\varphi\right)^{\frac{3}{2}}} + \\ &\quad + \frac{1}{\left(d^2+l^2+h^2-2\,d\,l\cos\varphi\right)^{\frac{3}{2}}}\Bigg]. \end{aligned} \tag{6}$$

Ha nem lenne a gravitációs forgatónyomaték, akkor a torziós inga lengési körfrekvenciája

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D_0}{\Theta}}$$

lenne, ahol $\Theta = 2\,m\,l^2$ az inga tehetetlenségi nyomatéka és D_0 – az előzőeknek megfelelően – a torziós szál direkciós nyomatékát (egységnyi szögkitéréshez tartozó visszatérítő forgatónyomatékot) jelöli. A gravitációs erők hatását úgy vehetjük figyelembe, hogy a (6) egyenletben adott visszatérítő forgatónyomatékot kis φ szögekre sorba fejtjük (kis szögeknél $\sin\varphi \approx \varphi$ és $\cos\varphi \approx 1$):

$$M_z \approx -D_{\text{grav}} \cdot \varphi,$$

ahol

$$\begin{aligned} D_{\text{grav}} = \gamma\, m M d\, l\Bigg[&\frac{1}{(d-l)^3} - \frac{1}{(d+l)^3} + \\ &+ \frac{1}{\left[(d-l)^2+h^2\right]^{3/2}} - \\ &- \frac{1}{\left[(d+l)^2+h^2\right]^{3/2}}\Bigg]. \end{aligned} \tag{7}$$

Itt jegyezzük meg, hogy ugyanezt az eredményt kapjuk, ha az $m(V_1+V_2)$ gravitációs energiát $\varphi = 0$ körül másodrendig sorba fejtjük, és összehasonlítva az

$$\frac{1}{2} D_{\text{grav}} \cdot \varphi^2$$

alakkal, leolvassuk a D_{grav} direkciós nyomatékot.

Így a torziós szál és a gravitáció együttes hatásaként a direkciós nyomaték $D = D_0 + D_{\text{grav}}$ és a lengési körfrekvencia:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{\Theta}} = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{D_{\text{grav}}}{\Theta}}. \tag{8}$$

Felhasználva, hogy $h,\ l \ll d$, a D_{grav} direkciós nyomatékot kis h-ra és l-re másodrendig sorba fejtve kapjuk (például Wolfram Alphát használva [22]):

$$\omega \approx \sqrt{\omega_0^2 + \frac{6\,\gamma M}{d^3}\left(1 + \frac{10\,l^2}{3\,d^2} - \frac{5\,h^2}{4\,d^2}\right)}. \tag{9}$$

Ezt érdemes összevetni az Eötvös és munkatársai által kapott eredménnyel, amely az 1906-ban kiírt Beneke-pályázatra beadott [26] tanulmányban szerepel. Eötvös a forgatónyomaték ezen képletét használta a gravitációs erőtér helyfüggésének kiértékeléséhez. Felhasználva az egyetemi oktatásban jól ismert modern matematikai formalizmust, [27] nyomán a jelen cikk jelöléseivel írhatjuk:

$$\begin{aligned} -M_z = &\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\Theta\frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\,\Theta\cos 2\varphi + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z}\cos\varphi - \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z}\sin\varphi\right) m\,h\,l. \end{aligned} \tag{10}$$

Itt az $U(\boldsymbol{r})$ gravitációs potenciál deriváltjait az inga tömegközéppontjában kell kiértékelni. Jelen esetben a két M tömegű test által létrehozott $U(\boldsymbol{r})$ gravitációs potenciál az $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ pontban:

$$U(\boldsymbol{r}) = -\gamma M\left[\frac{1}{|\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{r}|}+\frac{1}{|\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{r}|}\right] =$$

$$= -\gamma M\left[\frac{1}{\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}}+ \right. \tag{11}$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2+y^2+z^2}}\right].$$

Kiszámolhatjuk az $U(\boldsymbol{r})$ potenciál második deriváltjait az inga rúdjának felfüggesztési pontjában, azaz az $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$ pontban:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{2\gamma M}{d^3}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

ahol $i, j = x, y, z$. Látható, hogy a gravitációs potenciál második vegyes deriváltjai zérusok. Ez a potenciál speciális szimmetriájának a következménye. Innen és a (10) egyenletben az M_z forgatónyomatékot sorba fejtve $\varphi \ll 1$-re, a direkciós nyomatékra a következőt kapjuk:

$$D_{\text{grav}} \approx \frac{6\gamma M}{d^3}\Theta,$$

és így

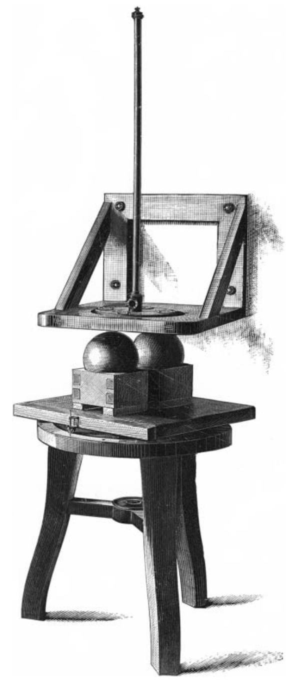
$$\omega \approx \sqrt{\omega_0^2 + \frac{6\gamma M}{d^3}}. \tag{13}$$

Az Eötvös-ingára ható forgatónyomaték és a frekvencia vezető rendben nem függ h-tól. Ezért az Eötvös-inga frekvenciája véges $h \ll d$ esetén független lesz h-tól. A (9) egyenletben a vezető renden túli tagokat (az l^2/d^2 és h^2/d^2 tagok) az Eötvös-ingával már nem lehet kimutatni.

A jubileumi, 50. Ortvay-verseny 2. feladata

(2019. október 25. – november 4.)

A ma róla elnevezett budapesti tudományegyetemen 1886-ra felépült fizikai (D) épületben a *18. ábrán látható* eszközt tervezte és építtette meg Eötvös Loránd a gravitációs állandó mérésére. Az eredeti Cavendish-féle kísérletet úgy módosította, hogy a torziós szálon függő, könnyű alumíniumrúd végein lévő m tömegű kis testeket nem ezekkel azonos magasságban elhelyezett testek vonzásával térítette el, hanem az alumíniumrúd alatt helyezte el a vízszintes síkban körbe forgatható, M tömegű két nagy golyót, ahogyan ez az ábrán is látható. Jelöljük d-vel a kis testek tömegközéppontjainak egymástól való távolságát, és legyen ugyanennyi a nagy golyók tömegközéppontjainak egymástól mért távolsága is, továbbá jelöljük a kis, valamint a nagy testek tömegközéppontjain átmenő vízszintes síkok távolságát h-val!



18. ábra. Eötvös Loránd eszköze a gravitációs állandó laboratóriumi, hallgatói mérésére.

Határozzuk meg, hogy mekkora szöget zár be ezekkel a vízszintes síkokkal az az egyenes, amely az egyik kis test és a hozzá közelebbi nagy golyó tömegközéppontján halad át akkor, amikor a nagy golyók tömegvonzása a legnagyobb forgatónyomatékot fejti ki a torziós ingára!

Numerikus számítással határozzuk meg, hogy hogyan függ ez a szög a h távolságtól! Becsüljük meg ezt a szöget a $R < h \ll d$ határesetben, ahol R a nagy golyók sugara! [28].

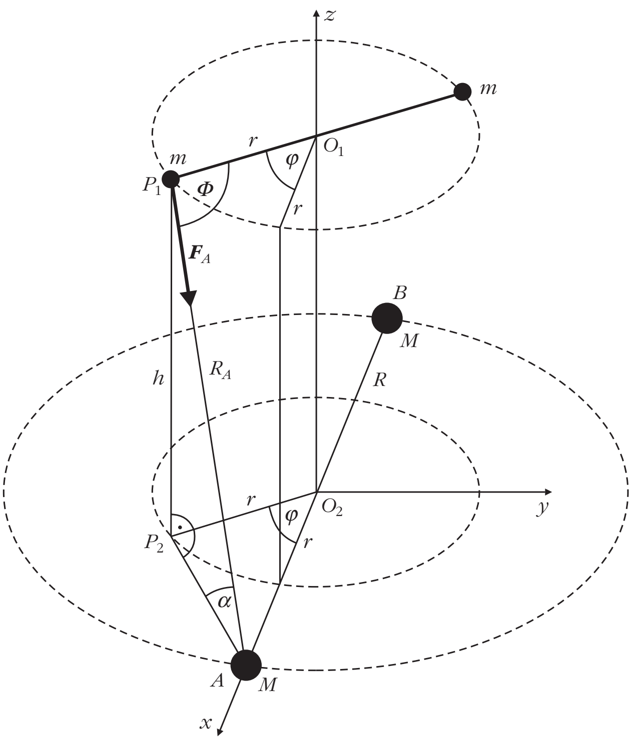
Az ábra forrása Eötvös Loránd 1896-ban, az *Annalen der Physik und Chemie*-ben közölt cikke, melyet *Selényi Pál* is közölt 1953-ban, *Eötvös Loránd összegyűjtött munkái* című művében [2].

(Radnai Gyula és Cserti József)

Megoldás

Mielőtt ismertetnénk a feladat megoldását, érdemes lesz felidéznünk Eötvös Loránd nevezetes, 1896-os publikációját, amelyben erről a kísérletről is beszél, s a feladathoz is mellékelt ábrát közli. Eötvös többek között ezt írja: „A vonzó-tömegek ugyanis a rúd alatt lévő vízszintes lapon abba a helyzetbe hozhatók, a melyben hatásuk a rúdra maximalis lesz. Így lesz az például golyók vonzásának esetében, ha a középpontjaikat a rúd golyóinak középpontjaival összekötő egyenesek a rúdra merőlegesen állván, a vízszintessel közel 55 foknyi szöget képeznek. Ebben a maximumnak megfelelő állásban elég, ha az egymásra ható tömegek viszonyos helyzetének meghatározásánál csak függélyes távolságuk lemérésére fordítunk gondot, ez pedig minden nehézség nélkül eszközölhető.” [6].

A feladat egyfajta általánosításaként, kibővítéseként tegyük fel hogy az M tömegű testek távolsága na-



19. ábra. Az inga helyzete a két M tömegű golyóhoz viszonyítva.

gyobb vagy egyenlő az inga rúdjának hosszánál, azaz $D = 2R \geq d = 2r$, ahogy ezt a *19. ábra* mutatja! Az M tömegű nagy golyók az x-y síkban fekvő O_2 középpontú, R sugarú körnek az x tengely mentén átmenő átmérőjének két végén, az ábrán az A, illetve B pontban vannak.

Az m tömegek az x-y síktól h magasságban, azzal párhuzamos síkban fekvő O_1 középpontú, r sugarú kör mentén mozoghatnak.

Tegyük fel, hogy a két m tömeget összekötő inga rúdjának (az x-y síkra vetített) függőleges vetülete, az ábrának megfelelően, az x tengellyel φ szöget zár be! Ekkor az M tömegű testek helyvektora: $\boldsymbol{R}_1 = (\mathrm{R}, 0, 0)$ és $\boldsymbol{R}_2 = -\boldsymbol{R}_1$. Az inga rúdjának két végén lévő m tömegű test helyvektora $\boldsymbol{r}_1 = (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ h)$ és $\boldsymbol{r}_2 = (-r\cos\varphi,\ -r\sin\varphi,\ h)$.

A feladat szerint a keresett α szög megegyezik az egyik kis test és a hozzá közelebbi nagy golyó tömegközéppontján áthaladó egyenes és a vízszintes sík által bezárt szöggel, azaz az $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{R}_1$ vektor, valamint a vízszintes sík által bezárt szöggel. Adott $0 < \varphi < \pi$ elfordulási szög esetén geometriailag belátható, hogy erre az α szögre:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{h}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2\,R\,r\cos\varphi}}. \qquad (14)$$

Az inga két végén lévő pontban a gravitációs potenciálokat ismét az (5) képletből számolhatjuk ki, csak az $\boldsymbol{R}_{1,2}$ és $\boldsymbol{r}_{1,2}$ helyvektorokat kell kicserélni a mostani feladatban adott értékekre. A z irányú forgatónyomatékot az előző feladathoz hasonlóan a (4) képletből számolhatjuk ki. Így az inga rúdjának két végén lévő m tömegű testekre ható eredő forgatónyomaték:

$$M_z(\varphi) = -m\frac{\partial(V_1 + V_2)}{\partial\varphi} =$$

$$= -2\,\gamma\, m\, M\, R\, r\sin\varphi\,\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{1}{\left(R^2 + r^2 + h^2 - 2\,R\,r\cos\varphi\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\left(R^2 + r^2 + h^2 + 2\,R\,r\cos\varphi\right)^{\frac{3}{2}}}\right], \qquad (15)$$

ami az egzakt eredmény a forgatónyomatékra. Közelítő megoldásnak azt tekintjük, amikor az m tömegre csak a közelebbi M tömeg hatását vesszük figyelembe. Ennek megfelelően a fenti egyenlet *első tagja* adja az $M_z^*(\varphi)$ *közelítő* forgatónyomatékot. Ebből a kifejezésből kiindulva az $M_z^*(\varphi)$ függvény φ szerinti deriválással analitikusan is meghatározhatjuk a feladatban kérdezett szöget. Megjegyezzük, hogy ha mind a két M tömeg hatását figyelembe vesszük, akkor a maximum helyét csak numerikusan lehet meghatározni. A közelítő $M_z^*(\varphi)$ forgatónyomatékot használva a szélsőérték-probléma $\cos\varphi$-re egy másodfokú egyenletre vezet, amelynek fizikailag lehetséges megoldása:

$$\cos\varphi^* = \qquad (16)$$

$$= \frac{\sqrt{12\,D^2\,d^2 + \left(D^2 + d^2 + 4\,h^2\right)^2} - \left(D^2 + d^2 + 4\,h^2\right)}{2\,D\,d}.$$

Ezt beírva a (14) összefüggésbe, adott D, d és h paraméterek mellett az α szögre a következőt kapjuk:

$$\mathrm{tg}\alpha^* = \qquad (17)$$

$$= \frac{2\,h}{\sqrt{2\,D^2 + 2\,d^2 + 4\,h^2 - \sqrt{12\,D^2\,d^2 + \left(D^2 + d^2 + 4\,h^2\right)^2}}}.$$

Ahogy az alábbiakban látni fogjuk, különösen érdekes az az eset – amit Eötvös is hangsúlyozott a fenti idézetben –, amikor az inga rúdja merőleges az egyik m tömeg és a hozzá közelebbi M tömeg középpontjait összekötő egyenesre, azaz ha $\Phi = 90°$. Ebben az esetben a D, d és h paraméterek már nem függetlenek. Valóban, az ábrából látható, hogy ekkor az AP_2O_2 háromszög derékszögű, és így

$$\cos\varphi = \frac{r}{R} = \frac{d}{D}.$$

Ha ezt az értéket egyenlővé tesszük a (16) egyenletben kapott szélsőértékkel, és megoldjuk a $\cos\varphi^* = d/D$ egyenletet D-re, akkor a következő megszorítást kapjuk a D, d és h paraméterek között:

$$D = \sqrt{d^2 + 2\,h^2}\ .$$

Ha ezt az összefüggést behelyettesítjük a (17) képletbe, akkor az α szögre egy *univerzális* értéket kapunk, *függetlenül d* és h értékétől:

$$\alpha^* = \operatorname{arctg}\sqrt{2} = 54{,}7°. \tag{18}$$

Megjegyezzük, hogy a közelítő forgatónyomaték φ szerinti második deriválásával megmutatható, hogy

$$D = \sqrt{d^2 + 2\,h^2}$$

esetén a forgatónyomatéknak valóban maximuma van. A D és d a kísérletben rögzített értékek, h változtatásával lehetett kikeresni a maximális forgatónyomatékhoz tartozó helyzetet. Erre utalhatott Eötvös a fent idézett utolsó mondatában.

Összefoglalva, ha $D = (d^2+2h^2)^{1/2}$, akkor a kis testekre ható forgatónyomaték az inga rúdjának annál a φ^* elfordulási szögénél maximális, amelyre $\cos\varphi^* = d/D$. Továbbá ebben a helyzetben d és h értékétől függetlenül az egyik kis test és a hozzá közelebbi nagy golyó tömegközéppontján áthaladó egyenesnek a vízszintes síkkal bezárt szöge $\alpha^* = \operatorname{arctg}\sqrt{2} = 54{,}7°$, és ez az egyenes merőleges az inga rúdjára.

Ez a szög abban az esetben közvetlenül is megkapható, amikor d és D ugyan egyenlők, de olyan nagyok már, hogy a körívek, amelyeken a testek elmozdulhatnak, függőleges síkban levő vízszintes, egymással párhuzamos egyenes szakaszoknak tekinthetők. Csupán a közelebbi M tömeg hatását véve figyelembe, az m tömegre ható és a rúdra merőleges erő a köztük lévő távolság négyzetével fordítottan, tehát a keresett α szög szinuszának négyzetével egyenesen arányos. Forgatónyomatékot viszont csak az erő vízszintes komponense létesít, ezért a forgatónyomaték maximuma annál a szögnél következik be, amelynél a $\sin^2\alpha\cos\alpha$ mennyiség maximális lesz. Ez a szög pedig éppen $\alpha^* = \operatorname{arctg}\sqrt{2} = 54{,}7°$.

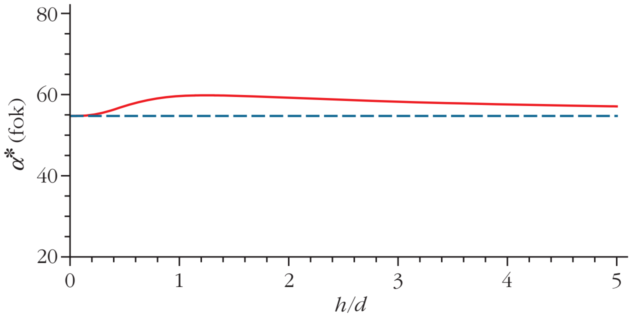
Vizsgáljuk meg, hogy a fenti közelítésben (azaz elhanyagolva a kis testektől távolabbi nagy golyó vonzó hatását) adódó $\alpha^* = \operatorname{arctg}\sqrt{2} = 54{,}7°$ szög mennyire tér el az egzakt (15) forgatónyomatékból kapható értékektől a $K = h/d$ paraméter függvényében $D = (d^2+2h^2)^{1/2}$ esetén! Az eredményt a *20. ábra* mutatja. Látható, hogy a legnagyobb eltérés $h/d \approx 1{,}25$-nél van, de ez sem nagyobb 5°-nál.

Végül vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor a feladat szerint $D = d$! Ekkor A (16) és a (17) kifejezések az alábbi alakba írhatók:

$$\cos\varphi^* = 2\sqrt{1 + K^2 + K^4} - 1 - 2\,K^2,$$

$$\operatorname{tg}\alpha^* = \sqrt{1 + K^2 + \sqrt{1 + K^2 + K^4}}\;.$$

Látható, hogy $h \to 0$ határesetben (rögzített d mellett $K \to 0$ esetén) $\alpha^* = \operatorname{arctg}\sqrt{2} = 54{,}7°$ határértékhez tart. Természetesen a $h \to 0$ határeset csak matematikailag lehetséges, ugyanis a kis testek és az alattuk lévő nagy gömbök középpontjain átmenő két vízszintes sík nem lehet közelebb a kis test és nagy gömb sugarainak összegénél.



20. ábra. Az α^* szög $K = h/d$ paraméter függvényében, amennyiben $D = (d^2+2h^2)^{1/2}$. A folytonos vonal az egzakt, a vízszintes, szaggatott vonal a közelítésből kapott $\alpha^* = 54{,}7°$ szögnek felel meg.

A fenti kísérleti eszköz ma már nem található meg az egyetemen, az 1886-ra elkészült, nevezetes D épületben, amelyet éppen az Eötvös-ingával folyó kísérletek első helyszíneként nyilvánított fizikatörténeti emlékhellyé 2018-ban az Európai Fizikai Társulat, együttműködve a hazai, Eötvös Loránd emlékét a nevében is őrző Eötvös Loránd Fizikai Társulattal [29]. Minden valószínűség szerint a többszöri átalakítások áldozatául esett, hiszen nem is a tanteremben, hanem laboratóriumban volt felállítva, és hallgatói mérésre szolgált. A mérés kiértékelése szempontjából nagy előnye volt, hogy mivel az inga a forgatónyomaték maximuma körül lengett néhány fokos amplitúdóval, fel lehetett tételezni a vonzóerő állandóságát, akár csak egy rugón függő súly esetén, amely ma már középiskolai fizikaórán is szereplő mérés. Azonban, ha a távolabbi golyó hatását nem vette figyelembe a hallgató, ez a mérésben néhány százalékos hibát okozhatott.

A gravitációs állandó igazi meghatározására Eötvös Loránd nem is ezt az eszközt használta, hanem azt a két ólomhasáb között lengetett ingát, amelyről a fenti második *KöMaL* feladat kapcsán emlékeztünk meg. Ezen mérés Eötvös általi kiértékelése sokkal bonyolultabb, lásd például [6], illetve [27].

A gravitációs állandó Eötvös Loránd által mért értéke, amelyet 1896-ban megjelent [6] tanulmányában közölt, csupán 0,36%-kal kisebb, mint a ma, 2020-ban elfogadott legpontosabb érték. Eötvös Loránd kivételes fizikusi nagyságára a mai fizikusok, geofizikusok és fizikatanárok számára nem is kell ennél jobb bizonyíték.

Irodalom

18. Környei Elek (szerk.): *Eötvös Loránd: A tudós és művelődéspolitikus írásaiból.* Gondolat Kiadó, Budapest (1964); részletek: https://www.antikvarium.hu/konyv/eotvos-lorand-262699
19. *Eötvös Loránd emlékalbum.* Kossuth Kiadó, Budapest (2019); részletek: https://www.kossuth.hu/adatlap/konyv/5168/eotvos-lorand-emlekalbum
20. Részletesebb tudnivalók a *KöMaL* teljes archívumának anyagáról: http://db.komal.hu/KomalHU/tortenet.phtml
21. A P. 5166. *KöMaL* feladat (2019. november) megoldása: https://www.komal.hu/feladat?a=feladat&f=P5166
22. Wolfram Alpha szimbolikus és numerikus matematikai kifejezések kiértékelésére használható online programcsomag: https://www.wolframalpha.com
23. P. G. Roll, R. Krotkov, R. H. Dicke: The Equivalence of Inertial and Passive Gravitational Mass. *Annals of Physics 26* (1964) 442–517; letölthető: http://physics.princeton.edu/romalis/papers/Roll_1964.pdf

24. A P. 5239. *KöMaL* feladat (2020. május) megoldása: https://www.komal.hu/feladat?a=feladat&f=P5239
25. Ortvay nemzetközi fizikai problémamegoldó verseny 2019., 1. feladat; letölthető: https://ortvay.elte.hu/hmain.html
26. Eötvös R., Pekár D., Fekete E.: Beiträge zum Gesetze der Proportionalität von Trägheit und Gravität. *Annalen der Physik (Leipzig) 68* (1922) 11–66; angol fordítás: R. v. Eötvös, D. Pekár, E. Fekete: Contribution to the law of proportionality of inertia and gravitation. *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae. Sectio geologica 7* (1963) 111–165; lásd https://matarka.hu/cikk_list.php?fusz=137841
27. Cserti József, Dávid Gyula: Az Eötvös-inga képletei. *Fizikai Szemle 69/7–8* (2019) 219–227; letölthető: http://fizikaiszemle.hu/uploads/2019/08/fizszem-20190708-cserti-david_09_56_51_1567151811.4595.pdf
28. Ortvay nemzetközi fizikai problémamegoldó verseny 2019., 2. feladat; letölthető: https://ortvay.elte.hu/hmain.html
29. Lendvai János: EPS Fizikatörténeti Emlékhely a Trefort-kerti D épület. *Fizikai Szemle 68/11* (2018) 365; Sólyom Jenő: Fizikatörténeti emlékhely a Puskin utcában. Ugyanott, 367. oldal; letölthető: http://fizikaiszemle.hu/uploads/2018/11/fizszem-201811-tartalom_12_18_47_1543576727.9004.pdf