

# VERSENYFELADATOK AZ EÖTVÖS-INGA BŰVÖLETÉBEN

## – 1. rész

Radnai Gyula

ELTE, Anyagtudományi Tanszék

Cserti József

ELTE, Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

Az interneten olvasható legtömörebb megfogalmazás szerint az Eötvös-inga olyan érzékeny torziós inga, amely a nehézségi erő kis térbeli változásainak mérésére szolgál.

Jellegzetes alakja mára már szimbólummá vált. Megjelent az *Eötvös Loránd* emléket őrző alkalmi bélyegeken, telefonkártyán, díjat megjelenítő érmén (1. ábra). Még szobor is készült róla, ez Budapesten látható, a nemrég még Eötvös Lorándról elnevezett Geofizikai Intézet előkertjében (2. ábra). Eötvös eredeti ingája, amellyel az 1900. évi Párizsi Világkiállításon aranyérmert nyert, és amelyet az ELTE

Anyagfizikai Tanszéke őriz, jelenleg az ELTE Egyetemi Könyvtár *A pontosság bűvöletében* című kiállításán látható. Ez adta az ötletet a mi címválasztásunkhoz is.

Öt olyan feladatot választottunk ki, amelyek színvonalas fizikaversenyeken szerepeltek és amelyek mindegyike kapcsolódik az Eötvös-ingához, vagy



1. ábra. Az Eötvös-inga szimbolikus megjelenítései.

valamelyik nevezetes Eötvös-kísérlethez. Meghagytuk a feladatok eredeti megfogalmazását és a megoldásokban alkalmazott jelöléseket azért is, hogy ha az itt némileg tömörített megoldást az olvasó részleteiben is követni szeretné a megadott elérhetőségeken, ne nehezítsük meg ezt az ottani jelölések megváltoztatásá-



Radnai Gyula ny. egyetemi docens, kandidátus, matematika-fizika tanári szakon végzett 1962-ben. Az ELTE Kísérleti Fizika tanszékén kapcsolódott be a tanárképzésbe. A hazai fizika kultúrtörténetének kutatója a '70-es évektől, amelyet a *Physics in Budapest* című könyv, a *Fizikai Szemlében* és a *Természet Világában* megjelent számos publikációja fémjelez. 1973-tól volt az Eötvös-versenybizottság tagja, *Vermes Miklóst* követően, 1988-tól 2013-ig vezetője. 1989-től vezeti a *KöMaL* fizikai szerkesztőbizottságát.



Cserti József 1982-ben végzett az ELTE fizikus szakán, majd az ELTE korábbi Szilárdtestfizika Tanszékén kezdte oktatói munkáját. 2004-ben habilitált, 2010 óta az MTA doktora, 2013-tól az ELTE Komplex Rendszerek Fizikája tanszékén professzor. Kutatási területe a nanofizikai rendszerek, normál-szupravezető rendszerek, spintronika, grafén és a topologikus szigetelők. 2005 óta szervezi az ELTE-n az Atomoktól a csillagokig előadás-sorozatot középiskolásoknak.

val. Az Ortvay-verseny feladatainak megoldásakor pedig – amelyek még nem lettek publikálva, itt jelennek meg először – a középiskolainál magasabb matematikai eszközökkel élünk, így jobban hasonlítanak azon gondolatmenetekre, amelyeket Eötvös Loránd alkalmazott eredeti publikációiban, elméleti fizikai megközelítéseiben.

De mielőtt ezeket a feladatokat bemutatnánk, érdemes lesz megemlékeznünk arról, hogyan is születhetett meg Eötvös Lorándban ezen inga ötlete.

## Tények, képek, gondolatok az Eötvös-inga megszületéséről

Mikor és miért választotta Eötvös Loránd éppen a gravitációt kutatási témául? *Mikola Sándor* szerint „lehetséges, hogy az első impulzust a Természettudományi Társulat adta meg 1881-ben, amikor megbízta, hogy határozza meg a nehézségi gyorsulást Budapesten, a Kárpátokban és az Alföldön. Lehetséges, hogy e kérdést hosszú ideig forgatta elméjében és így jutott rá módszerére” [1].

*Selényi Pál* úgy gondolta, hogy a kísérletező tudósra jellemző folytonos próbálgatás, tapogatózás közben talált Eötvös a kutatásra érdemes témára [2].

*Körmendi Alpár* hívta fel a figyelmet, hogy az *Internationale Erdmessung* Bécsből és Potsdamból irányított programjaiba – a földi nehézségi erőter görbületének meghatározása, a „függővonal-elhajlás” mérése – bizonyára bekapcsolódott a Magyar Tudományos Akadémia is, amelynek Eötvös 1889-től elnöke volt [3].

Az igazság sokoldalú, s a fenti magyarázatok az igazság más-más oldalára világítanak rá. Újabb oldalról közelítve a témához, lássuk, mit mondott 1889. január 16-án *Lengyel Béla*, a Királyi Magyar Természettudományi Társulat akkori titkára: „Örömmel tölt el, hogy fáradozásaiért Eötvös megkapta a jutalmat; olyan jutalmat, amelyennél szebbet és nagyobbat a bűvárkodó tudós nem remélhet. Mert van-e annál szebb és nagyobb jutalma a tudósoknak, mint mikor bűvárlati az eddig nem ismert és tőle keresett igazság felismerésére vezetik? Ebben a jutalomban részesült báró Eötvös Loránd is, és társulatunk büszkeségét és örömét lelheti abban, hogy a tudóst népszerű előadások tartására buzdítva, impulzust adott a mélyebb tudományos bűvárlatra és új igazságok felderítésére” [4].

Alig két hónappal azután mondta ezt *Lengyel Béla*, hogy Eötvös 1888. november 12-én beszámolt az Akadémián *Vizsgálatok a gravitatio jelenségének körében* [5] címmel. Ez az első dokumentálható, gravitációval foglalkozó előadása az Akadémián. Ő maga 1896-ban úgy emlékszik *Vizsgálatok a gravitatio és a mágnesesség köréből* [6] című tanulmányában, hogy nyolc éve foglalkozik a gravitáció témájával, vagyis emlékezett szerint 1888-ban kezdte gravitációs kutatásait.

Az 1887/88-as tanévben két segítségre talált a kísérletek összeállításához. Egyikük *Lengyel Béla* volt, egykori heidelbergi diáktársa, aki akkor már *Tban Károly* után a II. Kémiai Intézetet vezette. Az ő érdeme is, hogy Eötvös



2. ábra. Eötvös-ingát ábrázoló szobor a Magyar Földtani és Geofizikai Intézet kertjében.

megtarthatta tíz előadásból álló sorozatát 1888 január-február-márciusában. Ennek keretében Eötvös leghatásosabb előadását a gravitációról tartotta!

Eötvös másik segítője egy akkor első éves egyetemi hallgató, *Tangl Károly* volt, aki így emlékezett 1929-ben: „Abban a szerencsés helyzetben voltam, hogy e mérésekben még hallgatókoromban részt vehettem, ennek immár 40 esztendeje.”

*Lengyel Béla* mellett tehát *Tangl Károly* a másik hiteles szemtanú, aki megerősítheti Eötvös Loránd saját visszaemlékezését a gravitációs vizsgálatok megkezdéséről. *Tangl* így emlékezik: „Már 1888-ban sikerült báró Eötvös Lorándnak a tömegvonzás jelenségét egy népszerű előadáson nagyobb számú hallgatóságának bemutatni. Ez az eszköz azóta hazai középiskolák szertárában is otthonos lett. A fémszekrényben jól védett Coulomb-féle mérleg alatt kvadránsokra osztott hengeres vasedény volt elhelyezve, aminek szemben álló kvadráns párcsok felváltva higannyal lehetett megtölteni. A higany vonzása eltérítette a mérleg rúdját, amit a mérlegre erősített tükörrel visszavert fénysugár tett láthatóvá.”

A következő mondatot *Tangl* minden bizonnyal Eötvös Lorándtól idézi: „Az eszköz már 3-4 percnyi lengésidejével is elegendő érzékenységet, s e mellett a kivilágított és fűtött tanteremben is kellő állandóságot tanúsított” [7].

Erről az előadásról, amely a *Lengyel Béla* által említett – pártolt és szervezett – tíz előadásból álló sorozat egyik első (ha nem a legelső) előadása lehetett, így emlékezik meg a korabeli *Vasárnapi Újság*: „...a lámpától csillogó, fűtött előadási teremben több mint 300 hallgató jelenlétében megmutatta azt, hogy hogyan vonz néhány kilogrammnyi higany egy nem egészen 100 grammnyi súlyú ólomdarabkát” [8].

*Lengyel Bélától* tudjuk, hogy Eötvös Loránd előadásán ott voltak a kultuszminisztérium neves képviselői is: *Berzeviczy Albert* államtitkár, *Markusovszky Lajos*, az orvos- és gyógyszerészképzésért és *Klamarik János*, a középiskolai oktatásért felelős osztálytanácsosok. Így történhetett, hogy Eötvös higanykvadráns eszköze később otthonos lett a hazai középiskolák szertárában.



3. ábra. Charles Augustin de Coulomb (1736–1806) és Henry Cavendish (1731–1810).

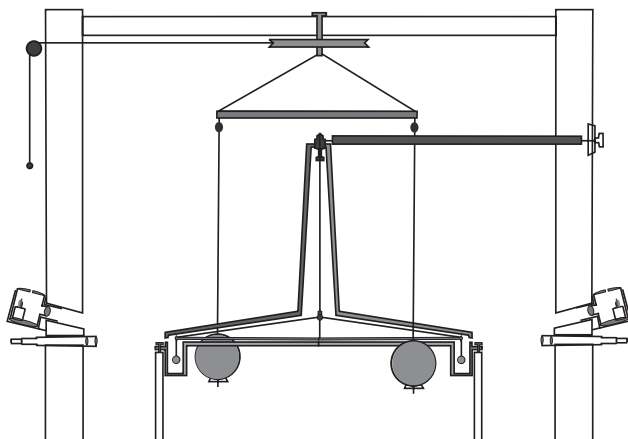
A siker szárnyakat ad. Eötvös az előadás-sorozat befejeztével nyilván hozzálátott a legsikeresebb, leghatásosabb kísérlet további finomításához. Ekkor és így kezdte el tehát Eötvös gravitációs kutatásait!

A szemtanú Tangl Károly – aki szerint „a gravitációs állandójának meghatározása képezte 1888 óta az egyetemi fizikai intézetben folyó vizsgálatoknak egyik célját” – ezt írja Eötvösről:

„...gravitációs kutatásaiban is mindennek előtt arra törekedett, hogy a mérési módszert tökéletesítse, a mérést pontosabbá és biztosabbá tegye, s a mérőeszköz érzékenységét növelje. A gravitációs erők mérésére elég érzékeny eszköz meg volt adva: a Coulomb-féle mérleg. A gravitációs állandó meghatározására eddig is többnyire ezt az eszközt használták, azonban nem volt elég állandó; a mérleg egyensúlyi helyzete egyelőre indokolatlan, kiszámíthatatlan ingadozásokat mutatott, minek folytán az egy- és ugyanazon eszközzel végzett egyes mérések közt jelentékeny eltérések mutatkoztak.

E zavarok eredetét báró Eötvös Loránd a mérleget magába záró szekrényben fellépő levegőáramokban kereste, melyeket apró hőmérséklet-különbségek hoznak létre. Hogy e zavaró hőmérséklet-különbségeket lehetőleg csökkentse, többféle próbálgatás után a Coulomb-féle mérleget kettős-, sőt hármásfalú fémsekre nyitotta; hogy pedig a szekrényben foglalt

4. ábra. John Michell torziós mérlegének rajza. Cavendish ezzel határozta meg a gravitációs állandót és következtette ki a Föld tömegét. A kísérletet azóta Cavendish-kísérletnek nevezik.



levegő mennyiségét leszállítsa, a rudat körülvevő fémszekrénynek lapos hengeralakot, vagy amikor nagy lengésekre nem volt szükség, lapos paralelepiped vagy hengeres csőalakot adott. Ezzel az egyszerű fogással tényleg sikerült az eszközt annyira állandóvá tenni, hogy nem csak kedvező hőmérsékleti viszonyok között, jól védett laboratóriumi helyiségekben lehetett vele biztosan mérni, hanem künn a szabadban, egyszerű vászonsátorban is” [7].

1888-ban persze még nem kellett a vászonsátor, Eötvös ekkor még nem vitte ki az eszközt a laboratóriumból. Azzal törődött, hogy a laboratóriumi mérés érzékenységét fokozza, ehhez szerkesztett újabb és újabb eszközöket, amelynek csodájára jártak fizikusok és nem fizikusok egyaránt. *Pekár Dezső* szerint „nagy találékonysággal megszerkesztett multiplikatív és különösen gravitációs kompenzátorával, melynek érzékenységét a végtelenségig fokozhatta, hihetetlenül kis vonzó hatásokat mutatott ki, így néhány liter levegő vonzását” [9].

*Coulomb* volt az a fizikus (3. ábrán balra), akinek „mérlegét” Eötvös Loránd fel kívánta javítani, előadási kísérletéhez meggyőzőbbé tenni. Coulomb személyisége is szimpatikus lehetett számára, mivel hadmérnöki diplomával a zsebében, különböző mérnöki megbízások teljesítése közben is szenvedélyesen hódolt hobbijának: a fizikai jelenségek mögötti kvantitatív törvények keresésének. Az építmények szilárdságát, tartógerendák lehajlását vizsgálta, az oszlopok csavarodásának vizsgálata pedig logikusan vezette a hajszálvékony rugalmas huzalok csavarási törvényének megállapításához. Ez adta az ötletet a csavarási (torziós) mérleg megszerkesztéséhez, amellyel rendkívül kis erőket tudott mérni. Először csak a huzal rugalmassága érdekelte, később jött az ötlet, hogy ezt fel lehetne használni a nagyon kis erők mérésére. Fogalma sem volt arról, hogy Skóciában *John Michell* (1724–1793) e célra már kitalálta és meg is építette a torziós mérleget (4. ábra), Coulomb is kitalálta majdnem ugyanazt. Michell nem publikálta találmányát, nevét is csak onnan tudjuk, hogy eszközét *Cavendish* (3. ábrán jobbra) rendelkezésére bocsátotta, aki erről becsületesen beszámolt, amikor saját mérési eredményeit publikálta a *Philosophical Transactions* lapjain. Erre azonban már csak azután került sor, hogy Coulomb is publikálta és saját mérési eredményeivel támasztotta alá a pontoszerű töltések között fellépő erők  $1/r^2$ -es törvényét.

A tömegvonzás Newton-törvényének torziós mérleggel történő laboratóriumi kísérleti igazolása tehát nem a francia Coulomb, hanem az angol Cavendish nevéhez fűződik, aki ezt 1798-ban végezte el John Michell torziós mérlegével. Ekkor Michell már nem élt.

Eötvös Loránd a Coulomb-mérleg feljavításával ugyanazokat a kísérleteket vitte véghez, amelyeket Cavendish elvégzett. Eötvös azonban egy fontos vonásban alapvetően eltért Coulomb és Cavendish eszközeitől. Az Eötvös-inga torziós szálán függő rúd két végéhez csatlakozó két azonos tömegű test közül csak az egyik van közvetlenül a rúdra erősítve, a másik vi-



szont egy függőleges szálon függ, ennek közvetítésével kapcsolódik a rúd másik végéhez. Ez a lényeges különbség tette lehetővé, hogy Eötvös képes legyen a földi nehézségi erőter kicsiny térbeli változásait meghatározni a műszer környezetében. Továbbá ez adja az Eötvös-inga azon jellegzetes alakját, amelyet a róla készült képzőművészeti alkotásokon láthatunk.

Hogyan születhetett meg ez a megoldás Eötvös fejében? A valószínű válasz megtalálásához érdemes visszanyúlnunk Eötvös első tudományos publikációjához e témában, a *Mathematikai és Természettudományi Értesítőben* 1896-ban megjelent 46 oldalas cikkhez, amelynek szándékosan visszafogott címe: *Vizsgálatok a gravitatio és mágnesség köréből (Előleges jelentés)* [6]. Az egyetlen fizikus, akire többször is hivatkozik a cikkben, Jolly.

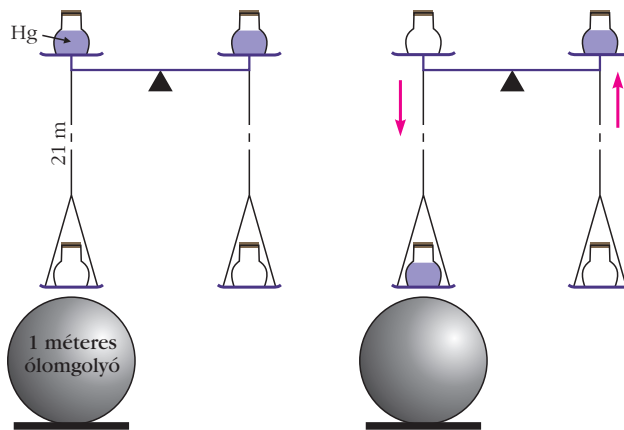
Idézzük Eötvös bevezető szavait, hogyan határozza meg az általa vállalt feladatot: „Ismerteink a nehézség térbeli változásaira vonatkozólag, a felismerésükre szolgáló módszerek elégtelensége miatt, mindeddig nagyon hiányosak. Az inga e változások kicsinységéhez mérten ki nem elégitó érzékenységgel csak nagy távolságokban teszi lehetővé azoknak felismerését, a mérleg pedig, úgy a mint azt Jolly használta, ugyan érzékenyebben, hanem csak egy kiváltságos irányban, t. i. lefelé tárja fel a változás nagyságát. Azok a módszerek és azok az eszközök, melyekről e jelentésben fogok szólni, lehetővé teszik e változások lemérést kicsiny, néhány deciméternyi távolságokban és különböző irányokban. Sőt az e módszerek szerint tett mérések az ingával és Jolly-féle mérleggel tett megfigyeléseket úgy egészítik ki, hogy ezekkel együtt a nehézség nagyságát és irányát teljesen ismertté teszik, nemcsak egyes pontokban, hanem a térnek egy olyan nagy kiterjedésű részében, a melyben ez erőt egyenletesen változóznak feltételezhetjük.” [6].

Mérési módszerének leírását pedig így fejezi be: „Megjegyzem még, hogy a függélyes síkban lengő inga mechanikáját abban a modorban tárgyalva, mint azt itt a Coulomb-féle ingára vonatkozólag röviden előadtam, az elmélet a g nehézségi gyorsulás függőleges változásának meghatározására a Jolly-féle eljárásnál előnyösebb módszerekkel kecsegtet, azoknak megvalósítása azonban a vízszintes forgási tengelyeket létesítő szerkezetek tökéletlensége miatt nekem mindeddig nem sikerült.” [6].

Ki volt hát Jolly, és mi volt az eljárása? A *História Tudósnaptárban* többek között ezt olvashatjuk róla:

„Jolly, Philipp Johann Gustav von,  
Mannheim, Németország, 1809. szept. 26. – München, 1884. dec. 24.

Német fizikus, matematikus  
Heidelbergben, Bécsben és Berlinben tanult, tanulmányait üvegfúvóknál és műszerkészítőknél végzett gyakorlattal egészítette ki. Tanulmányai befejezése után 1839-ben kinevezték Heidelbergbe a matematika rendkívüli tanárának, majd 1846-ban fizikaprofesszornak. 1854-ben Münchenben George Simeon Ohm utóda lett. Még ebben az évben nemesi címet kapott. Elsősorban kísérleti fizikus volt, számos precíziós műszert alkotott.



5. ábra. Jolly mérésének elve.

Nagy pontossággal megmérte a gravitációs gyorsulást. Később híressé vált diákja volt a müncheni egyetemen Max Planck, akit a legenda szerint 1878-ban megpróbált lebeszélni a fizikával kapcsolatos további tanulmányairól, mivel szerinte a fizika tudománya már majdnem elérte végreleges stabil formáját, és már csak néhány apró részletprobléma vár megoldásra. Planck szerencsére nem hallgatott tanárának tanácsára.” [10].

Nos, talán ez az utolsó mondat felfedi, miért nem szokás ma emlegetni Philipp von Jollyt a fizikában. Eötvös Loránd számára azonban Jolly személye mintája lehetett a precíz kísérleti fizikusnak, aki hasonló célú kísérleteket végzett, mint amelyet ő is kitűzött maga elé: a földi gravitációs tér változásának vizsgálatát, kísérleti meghatározását – igaz, hogy csak egyetlen egy, még pedig függőleges irányban. És mi volt Jolly eljárása?

Jolly kettős mérleget készített a gravitációs állandó, illetve a Föld tömegének a meghatározására. A mérleg két karján két-két mérlegtányér függött, amelyekben azonos tömegű testeket, például higannyal töltött lombikokat helyezett el (5. ábra). Az elvégzett kísérletekben az alsó és felső mérlegtányérok között elő-

6. ábra. Jolly kísérletéről nem készült fénykép, viszont az 5775,2 kg tömegű ólomgolyó eredeti méretű modellje megtekinthető a müncheni Deutsches Múzeumban.





7. ábra. Jolly laboratóriumi kettős mérlege.

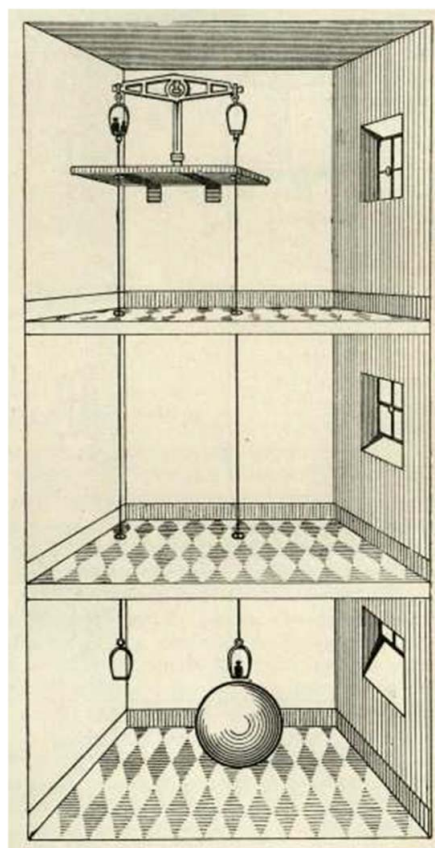
ször csak 5 méter, végül már 21 méter volt a szintkülönbség. Ha az egyik karon alul, a másikon felül helyezte el a higanyal töltött lombikot és az alul lévő lombik alá egy méteres ólomgolyót gördített (6. ábra), akkor a higany és az ólomgolyó vonzása megbontotta a mérleg egyensúlyát, s elég érzékeny mérlegen le is lehetett mérni, hogy mennyivel.

Jolly itt vehette észre, hogy a két különböző magasságban lévő test súlyának különbsége bizony akár egy nagyságrenddel is nagyobb lehet, mint a mérni kívánt vonzóerő, ezért később erre hegyezte ki a kísérletet, a nehézségi gyorsulás függőleges változásának minél pontosabb mérését tudta elvégezni minden ólomgolyó nélkül, csupán annak kihasználásával, hogy mérlegének egyik karján a tányért hosszú fonálon leógatta (7. ábra). Jolly kísérletéről nem készült fénykép, 1878-as, valamint 1881-es publikációjához [11] se csatolt ábrát.

Azonban a Jolly-kísérletet magyarázó, népszerűsítő szerzők fantáziáját megragadta a tény, hogy ezt Jolly Münchenben, az akkoriban felépült Aulaturmban (aulatoronyban) végezte el, még egy magyarázó ábra is született (8. ábra) [12].

Az igazság az, hogy Jolly a kísérletet a lépcsőfordulóban tudta összeállítani, ahol a kísérlethez elegendő, mintegy 1,5 méter szélességű hely állt a rendelkezésére. (Foucault ingakísérletét ma is láthatjuk egyetemeken, de akár a többemeletes középiskolák közepén üres lépcsőházaiban is.)

9. ábra. Philipp von Jolly (1809–1884).



8. ábra. Ügyetlen, hamis magyarázó ábra Jolly kísérletére.

Vajon nem innen vette Eötvös az egyik karról leeresztett tömegű inga ötletét? Jollynak komoly tekintélye lehetett Heidelbergben és később Münchenben is, az ő helyére került Kirchhoff Heidelbergbe és ő javasolta Kirchhoff tagságát később a Bajor Akadémiának. Kísérleteit Jolly 1878-ban publikálta először és 1881-ben másodszor az *Annalen der Physik*ben [11].

10. ábra. Az Aulaturm ma is kiemelkedik a szomszédos épületek közül Münchenben.



Eötvös Loránd, mivel maga is publikált e színvonalas folyóiratban, mindjárt megjelenéskor olvashatta ezeket. Ráadásul Jolly első cikke után véletlenül éppen *Fröblich Izidor* írása következett.

Arról nincs információnk, hogy személyesen ismerhették volna egymást, azonban Eötvös Loránd Kirchhofftól Heidelbergben bizonyosan hallott, mégpedig jókat hallhatott Jollyról. A korkülönbség elég nagy volt közöttük: Jolly még Eötvös Loránd édesapjánál, *Eötvös Józsefnél* is négy évvel volt idősebb.

Amikor Eötvös Loránd elkezdte saját gravitációs kísérleteit, Philipp von Jolly (9. *ábra*) már nem élt – ahogyan John Michell sem, amikor Henry Cavendish elkezdte kísérleteit.

A nevezetes müncheni Aulaturm (10. *ábra*) ma is megvan, csak már beépült a Fizikai Intézetbe [13].

## Az ünnepi Eötvös-verseny első feladata

(1998. október 16.)

Hazánk fizikus közössége 1998-ban ünnepelte Eötvös Loránd születésének 150. évfordulóját. Ebből az alkalmából az Eötvös-verseny akkori versenybizottsága olyan feladatot tűzött ki, amely Eötvös Loránd egyik nevezetes kísérletéhez, méréséhez kapcsolódott. A versenyen hagyományosan öt óra állt rendelkezésre a három feladat megoldására, egy-egy feladat szerzője pedig a versenybizottság egy-egy tagja volt. 1998-ban az első feladatot *Radnai Gyula*, a másodikat *Károlyházy Frigyes*, a harmadikat *Gnädig Péter* tűzte ki.

Az Eötvös-verseny már kezdettől fogva érvényes szabálya, hogy a versenyző diákok minden magukkal hozott, írt vagy nyomtatott segédeszközt, jegyzetet, könyvet felhasználhatnak a megoldáshoz. Ez alapvetően megkülönbözteti az általában szokásos tanulmányi versenyektől, amelyekben elsősorban a tanulók memóriája és csak másodsorban gondolkodási képessége van próbára téve.

Eötvös Loránd személye többszörösen kapcsolódik e versenyhez. 1894-ben, kultuszminiszterre történt kinevezése alkalmából és ennek tiszteletére határozta el az éppen általa létrehívott Matematikai és Fizikai Társulat vezetősége (*Schmidt Ágoston* és *König Gyula* alelnökök, valamint *Rados Gusztáv* és *Bartoniék Géza* titkárok), hogy minden év őszén, az abban az évben érettségizett diákok számára tanulmányversenyt indítanak matematikából és fizikából. Ezt egyfajta tehetségfelmérő versenynek szánták, hogy az egyetemi tanárok lássák, kik is kerültek be az egyetemre. A versenybizottság ma is úgy állítja össze a feladatokat, hogy a tárgy művelésében való jártasságot, ne a tárgyi tudást mérijék. Kezdetől fogva ez a célkitűzés emelte ki a versenyt a többi tanulmányi verseny közül, ennek köszönheti máig meglévő jó hírét, pedig az évtizedek során sok mindenben megváltozott.

A megmérettetés nagyon hamar matematikai versennyé alakult át, ezért *Károly Ireneusz*, a Schmidt Ágostont követő társulati alelnök 1916-ban létrehozott

egy alapítványt azért, hogy néhány nap eltéréssel két tanulmányversenyt is lehessen rendezni, egyiket matematikából, a másikat fizikából. A fizikai versenybizottság elnöke ekkor Eötvös Loránd, további két tagja pedig Bartoniek Géza és Mikola Sándor lett. Eötvös maga is kitalált feladatokat a fizikai tanulmányversenyre, amelyet első alkalommal *Jendrassik György* nyert meg, ekkor *Szilárd Leó* lett a második, a következő évben pedig *Sztrókey Pál* lett az első, és *Náray-Szabó István* a második helyezett. 1919-ben Eötvös Loránd meghalt, hamarosan a Társulat és a régebben indult matematikai tanulmányverseny is felvette a nevét. A fizikait később az akkor már szintén elhunyt Károly Ireneuszról nevezték el.

A második világháború után a Társulat kettévált. 1949-től indult újra a fizikaverseny, most már – és azóta is – Eötvös Loránd Fizikaverseny elnevezéssel. Eötvös Loránd nevét vette fel a Társulat fizikai része is, a másik részt Bolyai János Matematikai Társulat néven ismerjük. Az a matematikai tanulmányverseny pedig, amelyik addig Eötvös nevét viselte, *Kürschbák József* nevét vette fel. Azóta is ősszel, két, egymást követő héten rendezik meg az Eötvös- és a Kürschbák-versenyt.

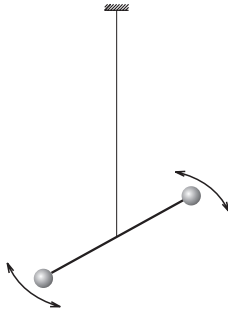
Csak az 1949-től 1998-ig eltelt fél évszázadot tekintve is számos elméleti fizikus sikeres karrierje kezdődött az Eötvös-versenyen való kiváló szerepléssel. Csupán néhányukat kiragadva a [14, 15] könyvekben olvasható részletes felsorolásból és máris elnézést kérve azoktól, akiket itt nem említünk: *Zimányi (Mráz) József* (1949, 1950), *Zawadowski Alfréd* (1953, 1954), *Geszti Tamás* (1956), *Mezei Ferenc* (1960), *Nagy Dénes Lajos* (1962), *Tichy Géza* és *Major János* (1963), *Gnädig Péter* (1965), *Meszéna Géza* és *Simányi Nándor* (1973), *Szép Jenő* (1974, 1975), *Vankó Péter* (1976, 1977), *Kaufmann Zoltán* (1978, 1979), *Krausz Ferenc* (1980), *Tóth Gábor* (1981, 1982), *Frei Zsolt* (1983), *Kaiser András* (1985, 1986), *Cynolter Gábor* (1986, 1987), *Fucskár Attila* (1987, 1988), *Katz Sándor* és *Veres Gábor* (1992, 1993), *Varga Dezső* (1993, 1994, 1995), *Tóth Gábor Zsolt* (1994, 1995, 1996).

1997-ben még csak az Eötvös-verseny 11–15. helyezette volt *Sarlós Ferenc*, a bajai III. Béla gimnázium 12. évfolyamú tanulója, aki a következő évben, 1998-ban már mint szegedi fizikus egyetemi hallgató, meg is nyerte az Eötvös-versenyt, holtversenyben *Végh Dáviddal*, akkor már az ELTE fizikus hallgatójával, aki a budapesti Fazekas Gimnáziumban érettségizett. 2020-ban Sarlós Ferenc az MTA Szegedi Biológiai Központ Biofizikai Intézetének kutatója és a Szegedi Tudományegyetem Biotechnológiai Tanszékének oktatója. Végh Dávid elméleti fizikus külföldön él, megjárta már az MIT-t és a Harvardot is posztdoktorként, jelenleg a Queen Mary University of London kutató fizikusa.

Lássuk hát ezt az 1998-as Eötvös-verseny feladatát, amely Eötvös Loránd 1889-es nevezetes publikációjára épül, a Szt. Gellérthegy vonzó erejére vonatkozó vizsgálatairól [16].

## A feladat

Eötvös Loránd görbületi variométerében egy vékony torziós szála közepén felfüggesztett könnyű rúd végein két test helyezkedik el azonos magasságban (11. ábra). Eötvös megmérte e görbületi variométer torziós lengésidejét (kis kitérések esetén) a Gellért-hegy lábánál, egyszer úgy, hogy a vízszintes rúd egyensúlyi helyzetében a hegy közepe felé mutatott, másszor úgy, hogy erre merőleges egyensúlyi helyzet körül lengett a rúd. Az első esetben 564,6 secundumnak, a második esetben 572,2 secundumnak találta a lengésidőt.



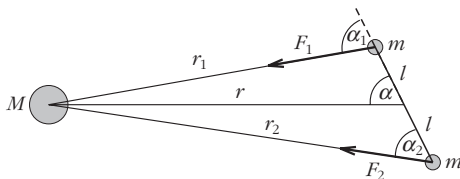
11. ábra. A feladathoz tartozó ábra: a görbületi variométer működésének elvi rajza.

Tegyük fel, hogy a Gellért-hegy gravitációs hatása egy, a műszertől vízszintesen 300 méter távolságra levő, megfelelő tömegű, pontszerű test vonzásával egyenértékű. Ezek után Eötvös fenti mérési adatait felhasználva becsljük meg, hogy a Gellért-hegy mekkora szöggel módosítja a mérés helyén a függőön irányát! [17]

(Radnai Gyula)

## Megoldás

A hivatalos megoldás a *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapokban* jelent meg [17]. Itt egy rövidített változatot közlünk. Tekintsük 12. ábrát! A könnyű



12. ábra. Az ingára ható erők.

rúd hosszát  $2l$ -lel, a rúd végein lévő kis testek tömegét  $m$ -mel, a Gellért-hegyet „helyettesítő” pontszerű test tömegét pedig  $M$ -mel jelöltük. A rúd közepe  $M$ -től állandó  $r = 300$  m távolságra van; az ábra egy olyan helyzetet mutat, amikor az ábra (vízszintes) síkjában lengő rúd egyik vége  $r_1$ , másik vége  $r_2$  távolságra van  $M$ -től. Felrajzoltuk a kis testekre ható,  $M$  által kifejtett gravitációs vonzó erőket is ( $F_1$ , illetve  $F_2$ ). Jellemezzük az inga helyzetét az  $r$  távolsággal és az ábrán látható  $\alpha$  szöggel! A koszinusz-tétel kétszeri

alkalmazásával az  $m$  tömegek távolsága az  $M$  tömegtől az alábbi alakban írható:

$$r_1 = \sqrt{r^2 + l^2 - 2lr \cos \alpha}$$

és

$$r_2 = \sqrt{r^2 + l^2 + 2lr \cos \alpha}.$$

Newton gravitációs törvénye szerint

$$F_1 = \gamma \frac{mM}{r_1^2}, \quad \text{illetve} \quad F_2 = \gamma \frac{mM}{r_2^2}.$$

Írjuk fel az ezen erők által a rúdra kifejtett  $\Gamma$  gravitációs forgatónyomatékok!

$$\Gamma = F_1 l \sin \alpha_1 - F_2 l \sin \alpha_2.$$

Egy-egy szinusz-tétel felhasználásával ez így is írható:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \left( \frac{F_1}{r_1} - \frac{F_2}{r_2} \right) l r \sin \alpha = \\ &= \gamma m M l r \sin \alpha \left( \frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) = \\ &= \gamma m M l r \sin \alpha \left[ \frac{1}{(r^2 + l^2 - 2lr \cos \alpha)^{3/2}} - \frac{1}{(r^2 + l^2 + 2lr \cos \alpha)^{3/2}} \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

A  $\Gamma$  forgatónyomatékok sikerült csupán a változó  $\alpha$  szög függvényében kifejezni.

Kihasználva, hogy

$$x = l \frac{\cos \alpha}{r} \ll 1,$$

az (1) egyenlet szögletes zárójelében lévő tényezőt a

$$(1+x)^n \approx 1 + nx$$

közelítő formula használatával átalakíthatjuk:

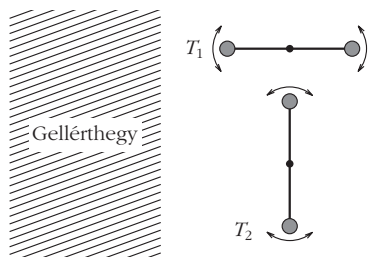
$$\begin{aligned} \Gamma &= \gamma m M l r \sin \alpha \frac{6l}{r^4} \cos \alpha = \\ &= \gamma \frac{mM}{r^2} \frac{l^2}{r} 3 \sin 2\alpha = 3 F_0 \frac{l^2}{r} \sin 2\alpha, \end{aligned} \quad (2)$$

ahol az utolsó egyenlőségnél bevezettük az

$$F_0 = \gamma \frac{mM}{r^2}$$

jelölést.





13. ábra. A kétféle lengésidő mérése.

Mikor lesz a  $\Gamma$  gravitációs forgatónyomaték zérus? Amikor  $\sin 2\alpha = 0$ , vagyis  $\alpha = 0$  és  $\alpha = \pi/2$  esetén. Egyik az a helyzet, amikor a rúd éppen  $M$  felé mutat, a másik helyzet erre merőleges. Ha csak a gravitációs erők hatnának, akkor  $\alpha = 0$  a rúd stabil egyensúlyi helyzetbe lenne, míg  $\alpha = \pi/2$  esetén a rúd labilis egyensúlyi helyzetben lenne.

Most azonban a rúdra nem csak a gravitációs forgatónyomaték hat, hanem az elfordulás közben megcsavaródó torziós szál által kifejtett „visszatérítő” forgatónyomaték is. Kis  $\Delta\alpha$  szögkitérés esetén ez  $\Delta\alpha$ -val arányosnak tekinthető; az arányossági tényezőt  $D^*$ -gal szokás jelölni.

Ha nem lenne a gravitációs forgatónyomaték, akkor a torziós inga lengésidőjét így lehetne kiszámítani:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{D^*}},$$

ahol  $\Theta$  a rúd középre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték. Milyen taggal egészül ki  $D^*$ , ha gravitációs forgatónyomaték is fellép?

Határozzuk meg a kis  $\Delta\alpha$ -hoz tartozó  $\Delta\Gamma$ -t!

$$\Delta\Gamma \approx \frac{d\Gamma}{d\alpha} \Delta\alpha = 6 F_0 \frac{l^2}{r} \cos 2\alpha \Delta\alpha.$$

Ebből leolvasható, hogy  $\alpha = 0$  esetén  $D^*$  korrekciója

$$6 F_0 \frac{l^2}{r},$$

míg  $\alpha = \pi/2$  esetén

$$-6 F_0 \frac{l^2}{r}$$

lesz, így

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{D^* + 6 F_0 \frac{l^2}{r}}}$$

és

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{D^* - 6 F_0 \frac{l^2}{r}}}.$$

Ezeket a  $T_1$  és  $T_2$  lengésidőket mérte le Eötvös Loránd (13. ábra).

Hogyan lehet ebből kiszámítani a függőőn „elhajlását”? Tegyük fel, hogy a függőőnra – fonálon függő kis testre – a Föld  $mg$  nagyságú függőleges irányú, a Gellérthegy pedig  $F_0 = mg^*$  nagyságú vízszintes irányú erőt fejt ki. Ekkor az a kicsi  $\delta$  szög, amivel a függőőn a függőlegestől eltér, így kapható meg:

$$\delta = \frac{g^*}{g},$$

vagyis a lengésidőképletekben  $F_0$  rejti a szükséges információt. Felírhatjuk, hogy

$$\frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{T_2^2} = \frac{12}{4\pi^2} \frac{F_0 l^2}{\Theta r} = \frac{3}{\pi^2} \frac{m g^* l^2}{2 m l^2 r} = \frac{3}{2\pi^2} \frac{g^*}{r}.$$

(Felhasználtuk, hogy  $\Theta = 2 m l^2$ .) Így a keresett  $\delta$  szög:

$$\delta = \frac{g^*}{g} = \frac{2}{3} \pi^2 \frac{r}{g} \left( \frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{T_2^2} \right).$$

Behelyettesítve a  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ,  $r = 300 \text{ m}$ ,  $T_1 = 564,6 \text{ s}$ ,  $T_2 = 572,2 \text{ s}$  értékeket, kapjuk:

$$\delta = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ radián} = 3,4''.$$

Ezzel a feladatot megoldottuk, mégis érdemes a megoldáshoz egy kiegészítő megjegyzést fűzni. A kapott eredmény birtokában meghatározható a vonzócentrum tömege! Minthogy

$$F_0 = \gamma \frac{mM}{r^2} = m g^*,$$

ezért

$$M = g^* \frac{r^2}{\gamma} = 2,2 \cdot 10^{11} \text{ kg}.$$

14. ábra. Gravitációs mérés a szabadban, a Ság-hegyen (1891). A vászonsátorban elhelyezett torziós inga állását távcső segítségével Eötvös Loránd észleli. Mögötte Tangl Károly egyetemi hallgató áll, a földön Kövesligethy Radó csillagász, a széken Bodola Lajos geodéta ül.





A Föld átlagos  $\rho = 5515 \text{ kg/m}^3$  sűrűségét felhasználva becslést adhatunk a vonzócentrum térfogatára is: ez 48,5 millió köbméter lesz, ami egy 226 méter sugarú gömb vagy egy 365 méter élhosszúságú kocka térfogata. A Gellérthegy meglehetősen szabálytalan alakú, Eötvös később ezért keresett egy szabályosabb alakú hegyet az országban. A Szombathely közelében lévő Ság-hegy csonkakúp alakja nyerte meg tetszését, itt készült az a ma már híres fénykép, amelyen a mérést végző Eötvös látható munkatársaival, Tangl Károllyal, *Bodola Lajossal* és *Kövesligethy Radóval* (14. ábra).

## Irodalom

- Mikola S., *Természettudományi Közlöny* 51 (1919) 210; letölthető: [https://adtplus.arcanum.hu/en/view/TermtudKozl\\_1919\\_kommun/?pg=0&layout=s](https://adtplus.arcanum.hu/en/view/TermtudKozl_1919_kommun/?pg=0&layout=s)
- Selényi P.: *Eötvös Loránd összegyűjtött munkái*. (1953); letölthető német nyelven: <https://www.szaktars.hu/akademiai/view/eotvos-lorand-eotvos-lorand-osszegyujtott-munkai-1953/?pg=5&layout=s>
- Körmenyi A.: Az Eötvös-inga és alkalmazásai. *Természet Világa (Természettudományi Közlöny)* 129 (1998) 352; letölthető: [https://adtplus.arcanum.hu/hu/view/TermtudKozl\\_1998/?pg=651&layout=s](https://adtplus.arcanum.hu/hu/view/TermtudKozl_1998/?pg=651&layout=s) (fizikai oldalszám 652) vagy [http://www.termeszetvilaga.hu/fizika\\_eve/tortenet/fizort/eotvos/kormendi.html](http://www.termeszetvilaga.hu/fizika_eve/tortenet/fizort/eotvos/kormendi.html)
- Lengyel B., *Természettudományi Közlöny* 21 (1889) 66; letölthető: [https://adtplus.arcanum.hu/hu/view/TermtudKozl\\_1889/?query=SZ&pg=77&layout=s](https://adtplus.arcanum.hu/hu/view/TermtudKozl_1889/?query=SZ&pg=77&layout=s)
- Eötvös L.: Vizsgálatok a gravitatio jelenségének körében. *Természettudományi Közlöny* 20 477 (1888); letölthető: [http://real.mtak.hu/103577/1/TermtudKozl\\_1888\\_\\_pages489-489.pdf](http://real.mtak.hu/103577/1/TermtudKozl_1888__pages489-489.pdf)
- B. Eötvös L.: Vizsgálatok a gravitatio és mágnesség köréből (Előleges jelentés.). *Matematikai és Természettudományi Értesítő XIV* (1896) 221–266; letölthető: [http://real-j.mtak.hu/4428/1/MatematikaiTermTudErtesito\\_14.pdf#221](http://real-j.mtak.hu/4428/1/MatematikaiTermTudErtesito_14.pdf#221)
- Tangl K.: Vizsgálatok a gravitációról. *Matematikai és Fizikai Lapok* 27(1918) 130; letölthető: [https://adtplus.arcanum.hu/hu/view/MTA\\_Konyvek\\_227795/?pg=114&layout=s&query=gravitacióról](https://adtplus.arcanum.hu/hu/view/MTA_Konyvek_227795/?pg=114&layout=s&query=gravitacióról) (fizikai oldalszám 115)
- Vasárnapi Újság* 1889/19; letölthető: <https://epa.oszk.hu/00000/00030/01836/pdf/01836.pdf>
- Pekár D.: Az ötvenéves Eötvös-inga. *Természettudományi Közlöny* 73 (1941) 224–230; letölthető: [https://adtplus.arcanum.hu/hu/view/TermtudKozl\\_1941/?pg=184&layout=s&query=Pekár](https://adtplus.arcanum.hu/hu/view/TermtudKozl_1941/?pg=184&layout=s&query=Pekár) (fizikai oldalszám 248–254)
- Tudósnaptár*itt: <https://tudosnaptar.kfki.hu/historia/egyen.php?namenev=jolly>
- Ph. v. Jolly: Die Anwendung der Waage auf Probleme der Gravitation (Mérleg alkalmazása gravitációs problémára). *Annalen der Physik* 241 (1878) 112–134; letölthető: <http://archiv.ub.uni-heidelberg.de/volltextserver/12716/> és Ph. v. Jolly: Die Anwendung der Waage auf Probleme der Gravitation: zweite Abhandlung (Mérleg alkalmazása gravitációs problémára: második értekezés). *Annalen der Physik*, 250 (1881) 331–355; letölthető: <https://archiv.ub.uni-heidelberg.de/volltextserver/12717/>
- L. Graetz: *Die Physik*. Max Planck Institute for the History of Science, Leipzig (1917) 66; a kép letölthető: [http://einstein-virtuell.mpiwg-berlin.mpg.de/VEA/SC-1816523987\\_MOD355385129\\_SEQ-114471879\\_SL154826715\\_en.html](http://einstein-virtuell.mpiwg-berlin.mpg.de/VEA/SC-1816523987_MOD355385129_SEQ-114471879_SL154826715_en.html)
- G. Oittner-Torkar: Philipp von Jolly und das Geheimnis der Bleikugel (Philipp von Jolly és az ólomgolyó titka). In: *Deutsches Museum München, Tudományos Évkönyv* (1990) 72–81; letölthető: [https://www.physik.uni-muenchen.de/lehre/vorlesungen/wise\\_12\\_13/E1/zusatzmaterialien/jolly.pdf](https://www.physik.uni-muenchen.de/lehre/vorlesungen/wise_12_13/E1/zusatzmaterialien/jolly.pdf)
- Vermes M.: *Az Eötvös-versenyek feladatai I. 1959–1988*. Typotex Kft., Budapest (1997) 163 old.; részletek: [https://www.typotex.hu/book/79/vermes\\_gyula\\_az\\_eotvos\\_versenyek\\_feladatai\\_1](https://www.typotex.hu/book/79/vermes_gyula_az_eotvos_versenyek_feladatai_1)
- Radnai Gy.: *Az Eötvös-versenyek feladatai II. 1989–1997*. Typotex Kft., Budapest (1998), digitális tankönyvtár: <https://regi.tan.konyvtar.hu/hu/tartalom/tkt/eotvos-versenyek/ar08.html>
- Eötvös L.: Jelentés a Szent-Gellérthegy vonzó erejéről. *Természettudományi Közlöny* (1889) 398., Akadémiai előadás ismertetője; letölthető: [http://real-j.mtak.hu/6584/1/TermtudKozl\\_1889.pdf#page=414](http://real-j.mtak.hu/6584/1/TermtudKozl_1889.pdf#page=414) (fizikai oldalszám: 414)
- Radnai Gy.: Beszámoló az 1998. évi Eötvös-versenyéről. *KöMaL* 1999. március, 172–181. (1. feladat); letölthető: [http://elft.hu/wp-content/uploads/2016/11/Eotvos-verseny\\_1998.pdf](http://elft.hu/wp-content/uploads/2016/11/Eotvos-verseny_1998.pdf) és <http://db.komal.hu/KomalHU/cikk.phtml?id=199818>

# BONIS BONA KITÜNTETÉST KAPOTT RADNAI GYULA

Radnai Gyula 1962-ben végzett az ELTE matematika–fizika szakán, azóta egyetlen munkahelye az Eötvös Loránd Tudományegyetem, ahol évtizedekig foglalkozott a fizikaszakos egyetemi hallgatók tanításával. Tanítványaiból lettek azok a fizikát, matematikát tanító középiskolai tanárok, akik az elmúlt fél évszázadban – a tanár úr lelkesítő példáját követve – az ország legjobb tanárai, mérnökei, kutatói, a fizika népszerűsítés, a tehetséggondozás elkötelezettjei lettek.

1990-ben nyerte el az ELTE doktora és az MTA fizikai tudomány kandidátusa címet. Hosszú ideig dolgozott az országos fizika felvételi bizottságban, amelynek közel tíz évig elnöke volt. 1988-ban *Vermes Miklóstól* vette át, majd 25 évig ellátta az Eötvös-verseny feladatkitűző bizottsága elnöki feladatát. 30 éve meghatározó alakja, fizika szerkesztőbizottsági elnöke *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapoknak*.

Emblematikus alakja a magyar fizikatanításnak. Bár tanárként nem dolgozott a közoktatásban, munkássága révén mégis oktatott, több középiskolai példatárával segítette fizikából a tehetséggondozást és a felkészülést a továbbtanulásra. Nemzedékek nőttek fel a híres Dér–Radnai–Soós-példára.

A 2020. augusztus 24-i díjátadón elhangzott laudáció alapján.

táron. Rendszeresen meghívták előadónak a vidéki és fővárosi középiskolák fizika témájú rendezvényeire. Lehetővé tette és szívügyének tekintette, hogy a fizikából legtehetségesebb magyar diákok összemérhessék tudásukat az Eötvös-versenyen. Több ezerre tehető azon középiskolás diákok száma, akik a *KöMaL* és Radnai tanár úr miatt szerették meg igazán a fizikát. Több országos fizikaverseny zsűrielnöke, mint a nagykanizsai Zemplén Győző, a székesfehérvári Láncczoz Kornél és a szolnoki Tarján Imre fizikaversenyek. Az 1990-es, 2000-es években az Eötvös Loránd Fizikai Társulat főtítkár-, illetve elnökhelyettese is volt.

Több mint 100 publikációja jelent meg a *Természet Világa*, az *Élet és Tudomány*, a *KöMaL*, a *Fizikai Szemle* és egyéb szaklapok hasábjain, túlnyomó részük a magyar fizika történetével és tudásaival ismerteti meg olvasóit. Ismeretterjesztő cikkei mindig gondos kutatómunkát követően, precíz tényanyaggal és élvezetes stílusban készülnek. A fizika tehetséggondozás iránti elkötelezettségét mutatja az is, hogy az egész országban és a határon túl is rengeteg meghívást kap középiskolásoknak vagy tanároknak szóló előadások tartására.

Radnai Gyulának szívből gratulálunk a kitüntetéshez.