Tekintsünk egy $n > 1$ egész számot és egy n pontból álló $\mathcal{S}$ halmazt a síkban úgy, hogy $\mathcal{S}$ bármely két különböző pontjának távolsága legalább 1. Ebből következik, hogy van olyan, $\mathcal{S}$-et szétválasztó ℓ egyenes, hogy $\mathcal{S}$ bármely pontjának ℓ-től való távolsága legalább $cn^{-1/3}$.

(Egy ℓ egyenes *szétválasztja* pontoknak egy $\mathcal{S}$ halmazát, ha valamely, $\mathcal{S}$-nek két pontját összekötő szakasz átmetszi ℓ-et.)

Megjegyzés. Gyengébb eredményre, amelyben $cn^{-1/3}$ helyett $cn^{-\alpha}$ áll, járhat részpontszám az $\alpha > 1/3$ konstans értékétől függően.

Egy különös életút, Ramanujan I. rész

Az előadás címe: „Egy különös életút, Ramanujan".* Kifejezőbb lett volna: „Egy romantikus életút, Ramanujan". A jelenlevő hallgatóságnak vannak már matematikai ismeretei, matematikusok közül is soknak nevéről hallott, életéről is tud valamit, az azonban talányosnak tűnhet, hogyan lehet egyáltalán egy matematikus alakját, életútját romantikusnak nevezni? Pedig *Geoffrey Harold Hardy,* a cambridge-i egyetem világhírű professzora, 100 év óta az első angol matematikus, akinek összegyűjtött munkáit hét vaskos kötetben kiadták halála után, 1936-ban az USA-beli Harvard-egyetemen Ramanujan-ról tartott előadássorozatát a következő szavakkal kezdte (magyar fordításban): „Ezen előadásokban olyan nehéz feladat elé állítottam magam, melyet – ha a sikertelenség miatt mindjárt az elején keresnék mentségeket – majdnem teljesíthetetlennek kellene minősítenem. Észszerű véleményt kell kialakítanom magamban – és ebben Önöket is segítenem – a jelenkori matematika legromantikusabb alakjáról, amit eddig sohasem tettem; egy olyan emberről, akinek karrierje tele van paradoxiákkal és ellentmondásokkal, ami megcsúfol minden olyan kánont, amellyel mi (matematikusok) egymást meg szoktuk ítélni, és akiről, azt hiszem, csak egyetlen dologban fogunk egyetérteni, hogy bizonyos értelemben nagyon nagy matematikus volt."

Nagy szavak. Már eleve elcsodálkoztatók két ellentétes okból. Matematikusok, olyan rendűek, mint Hardy, általában eredeti matematikai tartalmú értekezések, pláne könyvek írását ambicionálják; Hardy a Ramanujanról szóló 12 előadását könyv alakban adta ki 1940-ben, melynek címe „Ramanujan". Másrészt azonban mit jelent az a rezerváció, hogy csak „*bizonyos értelemben* nagyon nagy"?

Srinivasa Ramanujan 1887 decemberében született Indiában, egy Madrászhoz közeli kisvárosban nagyon szegény, vallásos brahmin családban. Apja egy ruhakereskedőnél volt könyvelőféle. 5 éves korában kezdett iskolába járni; matematikai képességei 10 éves korában kezdtek mutatkozni. Ekkor még jó vizsgái miatt féltandíjmentes lett, és számtantanára, akinek az órarendet kellett volna összeállítania,

*Ez a cikk az 1976-ban megtartott, azonos című TIT-előadás szövege. A KöMaL 1977. októberi számában jelent meg először. Később a Nagy pillanatok a matematika történetében c. könyvben volt olvasható. Az előadás anyagát T. Sós Vera egyetemi docens rendezte sajtó alá. (Szerk.)

azt rá bízhatta; mindenki, aki ezt valaha próbálta, tudja, milyen kellemetlen feladat ez, még ha akkor és ott a mellékfeltételek nem is voltak olyan számosak, mint manapság. Hindu életrajzírói szerint 13 éves volt, mikor trigonometriát tanulva rájött az $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ Euler-relációra és nagyon csalódott volt, mikor megtudta, hogy ez már régen ismert. Könyvei nem voltak; 16 éves volt, mikor az első matematikakönyvet kapta kölcsön egy barátjától. Ez egy *Carr* nevű tanár „Synopsis of elementary results in pure and applied mathematics” c. könyve volt. Ez Ramanujanra végletes hatással volt, igen jó és igen rossz hatással. Jó hatással, mert felfedeztette vele a „szép formula” gyönyörűségét; erre még majd később részletesebben visszatérek. Rossz hatással volt a könyv synopsis (összefoglalás) jellege miatt; bizonyítások a könyvben nemigen voltak, és ha igen, csak nagyon vázlatosak, és ebből a fiatalember – mondhatni, egy életre – azt a konklúziót vonta le, hogy a bizonyítás leírása, még a jelzése is felesleges, valamiféle intuíció egy villanása azt számára evidenciába tudta helyezni. Persze külső kérdésekre, hogy hogyan jött rá eredményeire, nem tudott válaszolni, és ezt *nem* módszereinek eltitkolására tette. Egy barátja szerint, aki velük egy házban lakott ebben az időben, gyakran felébredt éjjel 2 óra tájt, odament az odakészített táblához és egy viharlámpa halvány fényénél írt rá. Mikor kérdezték, mit csinál, azt felelte, hogy álmában rájött valamire, és azt rögzíti, hogy el ne felejtse reggelre. 16 évesen ösztöndíjjal bekerült egy jó college-ba, melyet Dél-India Cambridge-ének neveztek. Itt angolt, matematikát, biológiát, görögöt, szanszkritot és római történelmet kellett volna tanulnia, de akkor már mint a szép formula megszállottja, elkezdte írni napi felfedezéseit naplójába, mint *Gauss* (akiről nem is hallott akkor egyáltalán), és ezek sodrában nem tudott a többi tárggyal foglalkozni, megbukott és persze elvesztette ösztöndíját. Ez 1904-ben volt, újra beiratkozva 1905-ben annyit mulasztott, hogy nem is mehetett vizsgázni. 1906-ban egy másik college-ban próbálkozott, de megbetegedett és itt sem tudott továbbjutni. 1907-ben az eredeti college-ában mint magántanuló próbálkozott, és akkor is megbukott. Mit tehetett akkor egy hindu fiatalember, akinek apja havi 20 rúpiás fizetéséből tartotta el családját? Részint matematikát korrepetált, részint 1909-ben megnősült; felesége akkor 9 éves volt. Az ilyen házasság Indiában gyakori és inkább az itteni eljegyzéshez hasonlítható; férjéhez csak 12 éves korában költözött, ami Keleten persze mást jelent, mint Európában. Naplója közben egyre nőtt; első naplókönyve (a három közül) 300 sűrűn teleírt oldalából kb. a fele származhatott diákkorából. 1911-ben jelentek meg első dolgozatai az Indian Mathematical Journal-ben, de ezekből akkor sem Indiában, sem sehol a világon nem lehetett megélni, feleséget és szülőket támogatni. 1912-ben tisztviselői állást kapott havi 20 rúpiás fizetéssel, amit hamarosan felcserélhetett egy havi 30 rúpiással, ami akkor kb. évi 30 fontnak felelt meg.

Felmerül a kérdés, miért nem ismerték fel már addigi dolgozataiból Indiában, hazájában képességeit, ahol *voltak* egyetemek, volt már Matematikai Társulat és angliai végzettségű professzorok? Indiai matematikusok újra és újra felteszik maguknak a kérdést, miért kellett akkori elnyomóiknak, az angoloknak felfedezni azokat és később elősegíteni kifejlődésüket. Erre a válasz *egyrészt* az, hogy eredményei megelőzték az ún. moduláris formák elméletét, melyből kész elmélet csak 15 évvel később lett *Hecke* kezében (aki nem is tudott Ramanujan ez irányú eredményeiről), tehát részben olyan témakörökre vonatkoztak, amelyeket akkor sehol

– és így Indiában sem – műveltek. Átlagos képzettségű és képességű professzoroktól nem volt várható, hogy ebbe könnyen bele tudják magukat élni. Különösen akkor – és ez a válasz *másrészt* –, ha hozzávesszük, hogy Ramanujan exponáló (közlő) képessége még a 0-val lehetett egyenlő. Jellemző erre az a történet, amelyet egy osztálytársa mesélt egy college-beli matematikaóráról. A tanár egy feladatot kezdett kidolgozni a táblán. Az első két lépés után Ramanujan közbeszólt, hogy ezek feleslegesek és gondolkozás nélkül megmondta a megoldást. Utána a tanár hitetlenül folytatta a táblán a feladat megoldását és 8 vagy 10 további lépés után jutott – az osztály nagy csodálkozására – a Ramanujan által előre jelzett eredményhez. Kevés képzett, idősebb matematikusnak van kedve arra, hogy számára új témakörökben 8-10 lépéses ugrásokat maga tudjon a helyszínen (vagy akár nyugodtan töprengve íróasztala mellett) kisütni. És más ilyen történetekből láthatóan Ramanujan nem nagyon volt hajlandó a hiányzó lépéseket mint teljesen triviálisakat (neki triviálisakat) részletezni. A visszhangtalanság okául el lehetne képzelni, hogy túl büszke volt ahhoz, hogy maga keresse a kapcsolatot a matematikusokkal, hogy Mohamed menjen a hegyhez. De egy barátja szerint távolról sem ez volt a helyzet. 1910-től – mint mondja – Ramanujan egyik matematikustól a másikhoz ment bemutatván (ekkor már két) matematikai naplóját, majdnem 0 hatásfokkal.

Így fokozatosan belátván, hogy odahaza semmit sem remélhet, elszánta magát barátai rábeszélésére, hogy írjon Hardynak.

1913. január 16-os dátum van a levélen. Furcsa egy bemutatkozó levél volt, melyet csak kevéssé enyhít az, hogy nem tudván eléggé angolul, azt minden bizonnyal nem matematikus barátai fordították le, akik valószínűleg maguk sem nagyon uralták a nyelvet. De érdemes elgondolkodni felette, mert a számelmélet egy döntő fordulata múlott rajta, illetve kezdődött vele. Nem meditálva azon, hogy így kezdi: „A madrászi Port Trust Office tisztviselője vagyok, csupán évi 20 font fizetéssel" és azon sem, hogy miért írja utána, „I am about 23 years of age", mikor már 25 is elmúlt a levél írásakor, így folytatja (fordításban). „Elhagyva az iskolát, szabad időmben matematikával foglalkoztam. Nem jártam a szokásos úton, melyet egyetemi előadásokban követnek, új utat törtem magamnak." (Ismerős szavak ezek magyar füleknek.) Majd tovább: „Eredményeimet a helyi matematikusok bámulatosnak nevezik", de a következő mondatban ezt írja: „A helyi matematikusok nem tudnak megérteni engem magasabb szárnyalásomban" (in my higher flights). Leveléhez mellékelt naplójából összeválogatott 120 identitást. Majd befejezésül, mintegy az ellenkező végletbe esve írja; „Szegény lévén, ha úgy látja, hogy tételeimben van valami érték, szeretném azokat publikálni."

Mindenkiben felötlik, hogyan reagálna ő egy ilyen levélre; érdekesebb látni, hogyan reagált a cambridge-i egyetem akkor már világszerte ismert lecturerje (még nem volt professzor) az angol világbirodalom fénykora idején egy félművelt hindu fiatalember fent vázolt levelére. Erről tudunk *C. P. Snow* professzornak a kiváló fizikus, író és kultúrfilozófusnak, Hardy régi barátjának és akkori cambridge-i kollégájának rektori székfoglalójából 1962-ből, 15 évvel Hardy halála után; de Hardy maga is ír erről 1936-os harvardi előadásában. A kettő alapállása némileg különböző; bizonyos vonatkozásokban Snow verziója az emberibb. Eszerint az első lap elolvasása után Hardy a levél íróját félbolondnak tartotta, utána következő megjegyzését pontos prímszámformuláról hihetetlennek. A mellékletben küldött 120 identitás közül felületes átvizsgálásra egyesek rögtön feltűntek neki érdekes voltukkal, de a bizonyítások legcsekélyebb jelzésének hiánya bizalmatlanná tette. Az egész dolog nem tetszett neki, nyugodtan folytatta reggeli újságját, megtartotta óráját, délutáni teniszpartiját; de este magával vitte a levelet szokásos beszélgetésére *Littlewood*-dal, akivel való tartós kollaborálása már 1912-ben megkezdődött és haláláig, 1947-ig tartott. Ekkor alaposabban megnézték a matematikai mellékletet. Identitásaiból kettő olyan merőben újszerű *jellegű* volt, hogy ez meggyőzte őket, hogy jelentős emberrel van dolguk.

Hardy igen gyorsan, február 8-án már válaszolt, pozitívan a jóról, nem szólva a valószínűtlenről, csupán a bizonyítások valamelyes jelzését hiányolva. Ramanujan is rögtön válaszolt február 27-én. Ebben kifejezte örömét, hogy végre talált valakit, aki értően méltányolja matematikáját és őszintén feltárta tragikus anyagi helyzetét: „... Hogy megőrizzem agyamat, ennivaló kell nekem és ez most a legfőbb gondom. Minden ilyen levél öntől segíthet abban, hogy az egyetemtől vagy a kormánytól ösztöndíjat kapjak ...” Megindító viszont Hardy válasza március 26-án. Nem ismervén Ramanujan munkastílusát, mely az igazi oka volt annak, hogy nem írt bizonyításokat tételeihez, azt hitte, hogy bizalmatlanság ennek az oka. Hogy ezt eloszlassa, felsorolta, ki mindenkinek mutatta ő már meg Ramanujan leveleit és így, ha ő illegitim módon akarná az azokban említett eredményeit felhasználni, Ramanujannak könnyű dolga volna őt leleplezni. És a finom folytatás: „... Ne haragudjon, hogy a dolgot ilyen szókimondóan tárgyalom. Nem tenném, ha nem törekednék arra, hogy Ön nyilvánvaló matematikai képességei kifejlesztésére jobb lehetőségeket kapjon ...” Ramanujan már április 17-én válaszol. Ebben egyrészt közli, hogy egy *dr. Walker* nevű meteorológus intervenciójára a madrászi egyetemtől két évre évi 60 font ösztöndíjat kapott (már ebben is benne volt Hardy keze). Másrészt írja, hogy nem bizalmatlanság miatt nem ír bizonyításokat, hanem mert bár eredményei helyességében nem kételkedik, de azon utat, melyen ő ezekre rájött, maga is heurisztikusnak érzi. Mindenesetre május 1-jét indirekte megünnepelte azzal, hogy tisztviselői állását felmondta.

A levelezésből Hardy előtt világos lett, hogy Ramanujan Indiában maradva sohasem fogja tudni kipótolni alaphiányosságait. Első ez irányú célzására szülei tilalmára Ramanujan nemmel válaszolt; ettől a szülők csak valamilyen megrendezett vallási hókuszpókusz után álltak el. Ismét angol kezdeményezésre a madrászi egyetem két évre kiküldte Cambridge-be évi 250 font ösztöndíjjal, útiköltséggel, sőt még ruhatára európaiasítására is kapott pénzt. Még arról is gondoskodtak, hogy a hajón szigorúan vegetáriánus kosztot kapjon, melyhez ragaszkodott egész életében. Miután gondoskodott arról, hogy ösztöndíjából szülei havi 60 rúpiát kapjanak, 1914. március 30-án elindult hajón Angliába; Cambridge-be április 16-án érkezett.

Az európai életmódot hamar megszokta, ha pl. az európai cipőviselést 27 éves korban elkezdeni nem is lehetett nagyon könnyű. A Trinity College-ban lakott, európai kényelemben egyedül, maga főzte egyszerű, szigorúan vegetáriánus kosztját. Ezenfelül idejét egyes előadások látogatása, munkája és a Hardy-val való eszmecsere töltötte ki. A kiváló cambridge-i matematikus, *A. Berry* mesélte jóval később, hogy egy óráján egy formula levezetésén bajlódott. Közben mindig figyelte Ramanujan arcát, aki nyugodtan ült. Egyszer látja, hogy Ramanujan arca felragyog, és nagyon izgatottan izeg-mozog. Mikor megkérdezte, volna-e valami megjegyzése, Ramanujan felkelt és felírt a táblára egy formulát, melyet Berry a történet elmondásának időpontjában sem tudott még bebizonyítani. De a leglényegesebb volt a cambridge-i matematikusokkal való találkozása, akiknek a száma azonban a hamarosan megkezdődött első világháború miatt lényegileg Hardyra redukálódott.

Együtt volt hát minden, ami a nyugodt, koncentrált munkához kellett. Hardy a mindennapos személyi találkozás után hamarosan rájött arra, hogy Ramanujanban sokkal nagyobb kincset nyert, mint valaha is gondolta volna az előzmények után. Hardy sportos alapállású volt, szeretett mindent versenyszerűen tekinteni és azután pontozni. Jóval Ramanujan halála után, még a 20-as években, egy alkalommal a jelen századbeli matematikusok pontozására került sor. 100 pont lévén a maxiumum, Ramanujan kapott tőle 100 pontot, Hilbert 80-at, Littlewood 30-at, a többiek még kevesebbet, mondja a történet. Az abszurdnak ható osztályozás azonban bizonyos mértékben érthető. Hardy elragadtatásának oka nemcsak az volt, hogy majdnem minden nap féltucatnyi új eredményt közölt vele Ramanujan; maga a szám nem jelent túl sokat. Inkább azok fantáziát mutató jellege, váratlan volta, az a könnyedség, ahogy ezek szinte folytak gondolkozásmódjából anélkül, hogy valóban számot tudott volna adni, hogyan jött rájuk; ez ragadta meg Hardyt. Másrészt a gyors próbálgatásainak sikertelensége megoldásukra, ezek meggyőzték őt arról, hogy az állítások nem felszínen mozgók. Ezen tételek másfajta, eddig számára ismeretlen matematikai *gondolkozásmódot* fedtek fel előtte. Az az eredetiség, az a globálisnak nevezhető látásmód, mely annyira különbözött minden más, általa ismert matematikusétól, nyűgözte le. Hardy könyvében erősen hadakozik az ellen, hogy Ramanujan képességeit, eredeti látásmódját valamiféle keleti misztikus filozófia alakította ki. Magam is ismerek olyan fiatal magyar matematikust, akinek keleti filozófiák tanulmányozása nélkül minden bizonnyal ilyen globális látásmódja van, de rendszeres matematikai előképzettséggel rendelkezvén, utólag ki tudja analizálni ugrásait és szokásos lépésekre bontani.

Hardy határtalan lelkesedése vitte keresztül, hogy Ramanujan 1918 májusában középiskolai végzettség nélkül Fellow of the Royal Society lett, ami a mi akadémiai tagságunknak felel meg, és amely megtiszteltetés hindut előtte csak egy nem matematikust ért. 1919. október 18-án elsőként a híres Trinity College fellow-jává választották, ami 6 évre évi 250 fontos fizetést jelentett, minden kötelezettség nélkül. Illetőleg jelentett *volna,* ha nem kapott volna már 1917 márciusában a feszített munka, a gyenge táplálkozás és az angol éghajlat miatt tüdővészt, amely miatt végül is már 1919. február 27-én haza kellett utaznia. Hardy ajánlására a madrászi egyetem is megszavazott neki évi 250 fontot 5 évre és arra is lépések történtek, hogy számára egy professzori állást létesítsenek. Még egy rövid levelet tudott írni 1920 januárjában Hardynak, mely matematikával foglalkozott, de ugyanezen év április 26-án a tüdővész legyűrte. Nem volt tehát 33 éves sem, mikor meghalt, pedig talán éppen ez a matematikus legjobb kora. Szülei, nagyanyja, 20 éves felesége gyászolta; emlékét – *Watson* becslése szerint – vagy 3-4 ezer tétel őrzi.

Hogy Ramanujan angliai útjával Hardy mit nyert, már sejtjük, és hogy a matematika mit nyert, tudjuk. Mit nyert Ramanujan a jóval kedvezőbb munkakörülményeken és a tüdővészen felül? Indiai barátainak írott levelei felelnek erre. Már 1914 októberében írja, hogy egyelőre félreteszi régi eredményeit és mivel egyet s mást már tanult az itteni módszerekből, először ezek alkalmazásába akar belejönni. 1915. januárban már belátja, hogy naplójában levő tételeire még nincs szigorú bizonyítása. Ezért júliusban már azt írta, hogy pár évvel tovább kell Cambridge-ben maradnia, mert Madrászban sem segítséget, sem irodalmi referenciákat munkájához nem tudna kapni senkitől. Hardy maga is ír kölcsönhatásukról. Ramanujan kezdeti matematikatudási állapotát finoman úgy fejezte ki, hogy „tudásának korlátjai ugyanolyan meglepőek voltak, mint eredményeinek mélysége". Mint írja tovább, „(érkezésekor) fogalmai arról, hogy mi egy matematikai bizonyítás, a lehető leghomályosabbak voltak", ugyanakkor, mikor pl. az ún. lánctörtek nehéz elméletének már felülmúlhatatlan mestere volt. Pár év alatt végül is maga meg tudta mondani, hogy valamit be tud-e bizonyítani vagy nem. Hardy tudta azt, amit Mikszáth hályogoperáló kovácsa nem tudott, hogy szolid matematikai megalapozás elvehetné Ramanujan intuícióját. Így csak olyan dolgokra tanította, melyek nemtudása alapvető hibákra vezethet; de hozzátette, hogy ő sokkal többet tanult Ramanujantól. Ez a tanulás nem rontotta el Ramanujan intuícióját.

Mielőtt Ramanujan matematikai munkáinak legalább érzékeltetésére térnék, még egy mozzanatra térnék ki, mely bizonyos mértékben megvilágítja Ramanujan kutatási módszereit és egyben egy további paradoxiát is mutat. Ez pedig Ramanujannak a pozitív egész számokhoz való kapcsolata volt. Valaki úgy fogalmazta meg ezt, hogy Ramanujannak minden egész szám személyes ismerőse. Ha megsejtett egy összefüggést, ezt számpéldákon verifikálva nyert impulzust további meggondolások keresésére. Kifejezetten ezen az úton jutott eredményeihez azon n-számokra vonatkozólag, melyekre

$$d(n) > d(v), \qquad \text{ha} \qquad 1 \leqslant v < n;$$

itt $d(k)$ jelenti a k egész szám pozitív osztói számát. Az ilyen számokat „highly composed numbers"-nak, „nagyon összetett" számoknak nevezve, felírta az első kb. 2000 ilyen számot; az utolsó

$$n = 146\,659\,312\,800 = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$$

volt.

Mikor egyszer Hardyval Londonban taxin mentek, Hardy a taxi távozása után jött rá, hogy aktatáskáját a kocsiban felejtette. Kéziratok lévén a táskában, ez kétségbe ejtette, de Ramanujan megnyugtatta, nincs baj, ő emlékszik, hogy a taxi száma 1729. Hardy nagyon megkönnyebbült, de rögtön megkérdezte, hogy jutott eszébe *egyáltalán* megjegyezni a taxiszámot, és ha már igen, hogyan lehetett egy ilyen érdektelen számot megjegyezni. Nem érdektelen ez a szám, felelte Ramanujan, ez a legkisebb egész szám, amely egynél többféleképp állítható elő két köbszám összegeként. Tényleg:

$$1729 = 1 + 1728 = 1^3 + 12^3 = 1000 + 729 = 10^3 + 9^3.$$

Ezt Ramanujan, mellesleg szólva, nem ott a helyszínen találta, egy korai naplójában megtalálták ezt az észrevételt.

Azt lehetne hinni erről, hogy Ramanujan első érdeklődési területe a számelmélet volt; de a valóság az, hogy angliai útja előtt számelmélettel igen keveset foglalkozott, Carr anyagának hatása miatt. Ha Carr gyűjteménye helyett college-éveiben egy jobb számelméleti bevezető könyv kerül kezébe, biztosan más lett volna alakulása. A számelmélettel *igazán* csak Angliában került kapcsolatba. Azt is lehetne hinni az előbbiek után, hogy gyors és jó számoló volt. Ez sem igaz. Hardy megfigyelte, hogy úgy ad össze és szoroz, mint akárki az iskolában, és mikor egyszer tényleges számolásra került sor, nála jóval gyorsabbnak mutatkozott a matematika egy másik különös alakja, *Mac Mahon* őrnagy.

Turán Pál

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. *a*) Mely x valós számokra értelmezhető az

$$f(x)=\sqrt{\frac{1-\sqrt{x-3}}{\log_2(x-2)}}$$

függvény? (*5 pont*)

b) Adjunk meg legalább két olyan valós számot, amelyekkel a

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{2x+3}=\sqrt{3x+7}$$

és a

$$16^x\cdot 8^{2x}\cdot 4^{6x}\cdot\sqrt{2}=64$$

egyenletek valós gyökei valamilyen sorrendben egy-egy számtani sorozat egymás utáni tagjai lehetnek. (*6 pont*)

2. Az Agatha Christie műveiből készült Poirot-novellák című tv-sorozat „A csokoládésdoboz” című epizódjának egyik jelenetében két szereplő, egy férfi és egy nő, egy operaelőadás hallgatása közben egy doboz belga csokoládét kóstolgatott. A dobozt a jelenet kezdetén bontották fel, és a dobozban kezdetben 7-féle csokoládéfigura volt, mindegyikből 4 darab az *ábra* szerint.

A női szereplő kedvence a korona alakú csokoládé. Kóstolgatás közben az udvariasság szabályai szerint mindig a hölgy választ először, aztán a férfi, majd újra a hölgy, aztán a férfi és így tovább. A férfi